

А.А. Кабанов, В.А. Крамарь, К.В. Дементьев

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЙ В ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ АНПА

Статья посвящена разработке алгоритма оптимального комплексирования оценок состояний в дискретно-непрерывных системах. Целью исследования является создание эффективного метода объединения данных, получаемых от непрерывных и дискретных источников информации, для повышения точности и надежности оценки состояния сложных динамических систем. В статье подробно рассматриваются теоретические основы предложенного метода, включая математическое описание непрерывной и дискретной моделей системы, формулировку критерия оптимальности и вывод уравнений для вычисления весовых коэффициентов комплексирования. Особое внимание уделяется анализу условий, при которых предложенный алгоритм обеспечивает улучшение точности оценки по сравнению с использованием только непрерывного или только дискретного фильтра. Авторы приводят результаты численного моделирования, демонстрирующие эффективность разработанного алгоритма на примере оценки параметров движения автономного подводного аппарата. Показано, что предложенный метод комплексирования позволяет существенно снизить ошибки оценивания по сравнению с использованием отдельных фильтров, особенно в условиях неполноты и зашумленности измерений. В заключение делаются выводы о перспективности применения разработанного алгоритма в различных областях, связанных с обработкой информации в сложных технических системах, таких как навигация, управление движением, мониторинг состояния объектов и процессов. Отмечается, что предложенный подход может быть обобщен на случай комплексирования данных от большего числа источников информации и адаптирован к различным типам дискретно-непрерывных систем. Статья представляет интерес для специалистов в области теории управления, обработки сигналов и информации, а также разработчиков систем навигации и управления движением. Результаты исследования могут найти практическое применение при создании высокоточных систем оценивания состояния в различных технических приложениях.

Непрерывно-дискретные системы; комплексирование датчиков; оценка состояния; оптимальная оценка; терминальные системы.

A.A. Kabanov, V.A. Kramar, K.V. Dementiev

THE OPTIMAL STATE ESTIMATION FUSION ALGORITHM IN DISCRETE-CONTINUOUS AUV SYSTEMS

The article is focused on the optimal state estimation fusion algorithm for discrete-continuous systems. The aim of the study is to create an effective fusion strategy for combining data obtained from continuous and discrete information sources to improve the accuracy and reliability of state estimation in complex dynamic systems. The paper discusses in detail the theoretical foundations of the proposed method, including the mathematical description of the continuous and discrete system models, the optimization criterion formulation, and the derivation of equations for calculating the complementation weights. Particular attention is paid to the analysis of conditions under which the proposed algorithm provides an improvement in estimation accuracy compared to the use of only continuous or only discrete filter. The authors present the results of numerical modeling demonstrating the developed algorithm efficiency on the example of autonomous underwater vehicle motion parameter estimation. It is shown that the proposed fusion method allows to significantly reduce the estimation errors compared to the use of separate filters, especially in conditions of incompleteness and noise in measurements. In conclusion, it is stated that the developed algorithm is promising for application in various fields related to information processing in complex technical systems, such as navigation, motion control, monitoring of the objects and processes. It is noted that the proposed approach can be generalized to the case of complexing data from a larger number of information sources and adapted to different types of discrete-continuous systems. The article is considered to be valuable for specialists in control theory, signal and information processing, as well as for developers of navigation and motion control systems. The research results can find practical application in the creation of high-precision state estimation systems in various technical applications.

Continuous-discrete systems; sensors fusion; state estimation; optimal estimation; terminal systems.

Введение. Повышение требований точности к современным системам управления, функционирующих в условиях случайных возмущений, приводит к необходимости применения нескольких каналов измерений. В случае использования непрерывных и дискретных измерительных подсистем возникает проблемы их комплексирования с целью повышения качества и точности системы в целом. Также смешанные непрерывно-дискретные измерения характерны для современных средств автономной навигации.

Современные требования к движению автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) характеризуется жесткими ограничениями на величины отклонения АНПА от заданной траектории. При этом существенно повышаются требования к точности определения координат АНПА [1, 2]. В этой связи все большее применение находят комплексные методы определения координат местоположения АНПА на базе объединения и оптимальной обработки навигационной информации, способствующих существенному повышению точности движения АНПА [3–6].

Одной из основных задач является оптимальное комплексирование данных от различных источников навигационной информации. При комплексном использовании навигационных средств для определения места АНПА должно быть обращено особое внимание на удельный вес каждого из источников информации. Оптимальное в смысле точности определения координат должно дать объединение измерений от всех источников, а не выделение, как в классическом случае, двух подсистем.

Как известно, одним из мощных методов решения такого рода задач является фильтрация Калмана [7–13]. Однако применение этого метода в данной задаче усложнено тем, что измерители функционируют как непрерывно, так и дискретно во времени [14].

Одним из классов нестационарных систем управления, в котором возникает задача комплексирования измерительных каналов непрерывного и дискретного типа, является класс систем управления конечного состояния [15]. Основной отличительной чертой таких систем управления является наличие терминальных условий (наличие жестких ограничений на значения фазовых координат системы в конечный момент времени).

Таким образом, в статье рассматривается задача управлением объектом, содержащим в контуре управления измерительные устройства, функционирующие как непрерывно, так и дискретно во времени. Необходимо объединить результаты таких измерений на основе калмановской фильтрации в единую систему с целью повышения точностных характеристик всего контура управления.

Общая постановка задачи комплексирования. Для систем управления, содержащих два канала измерений (непрерывный и дискретный), характерно одинаковое формализованное представление протекающих в контуре физических процессов.

Модель динамики систем представляется взаимосвязанной системой обыкновенных дифференциальных и конечно-разностных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_1(t)x(t) + B_1(t)u_1(t) + w_1(t), \quad t \in T_i, \\ x(t_{i+1}) &= A_2(t_i)x(t_i) + B_2(t_i)u_2(t_i) + w_2(t_i), \quad t_i \in \Theta, \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнении (1) приняты следующие обозначения: $T_i = [t_i, t_{i+1})$ – полуоткрытый временной интервал функционирования системы управления между моментами работы дискретной подсистемы, причем $T = [t_0, t_f]$ – полное время функционирования системы, а t_0 и t_f – соответственно начальный и конечный моменты времени процесса управления, $\Theta = \{t_1, t_2, \dots, t_{k_f} : (t_{i+1} - t_i) > 0\}$ – множество моментов функционирования дискретной подсистемы, $x \in R^n$ – вектор состояния системы, элементы которого является непрерывно-дифференцируемым на T_i функциями и терпят разрывы первого рода на Θ , причем за значения элементов вектора x в точках разрыва принимаются правые пределы, $u_1 \in R^{m_1}$, $u_2 \in R^{m_2}$ – векторы управления непрерывной и дискретной подсистем соответственно, w_1 и w_2 – n -мерные векторы возмущений, x_0 – вектор начального состояния системы.

Система управления содержит непрерывные и дискретные измерительные устройства, функционирующие в соответствии с уравнениями

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1(t)x(t) + v_1(t), \quad t \in T_i, \\ y_2(t_i) &= C_2(t_i)x(t_i) + v_2(t_i), \quad t_i \in \Theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где $y_1(t)$ и $y_2(t_i)$ – q_1 - и q_2 -мерные векторы непрерывных и дискретных измерений, $v_1(t)$ и $v_2(t_i)$ – векторы ошибок измерений соответствующей размерности.

Матрицы A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно состоят из кусочно-непрерывных и кусочно-постоянных элементов и согласованы с описанием (1), (2).

Задача комплексирования в общем виде формулируется следующим образом. Необходимо найти такое оптимальное объединение сигналов от непрерывных и дискретных измерителей, которое позволяет существенно повысить точностные характеристики всей системы управления.

В связи с тем, что реальные системы управления подвержены влиянию различного рода случайных факторов, действующих как на сам объект управления, так и на информационно измерительный комплекс, поставленную задачу можно сформулировать следующим образом. Требуется построить алгоритм оптимальной статистической обработки данных, позволяющий осуществить рациональное комплексирование отдельных измерительных каналов, с целью повышения точности системы управления на основе более точного определения текущих значений, измеряемых параметров.

Под оптимальной статистической обработкой будем понимать задачу синтеза оптимального оценщика вектора состояния системы на основе метода оптимального нестационарного оценивания состояния Калмана за счет их удобной реализации и возможности выработки текущей оценки фазовых координат системы управления в моменты поступления сигналов измерения.

Решение общей задачи требует применение обобщенного метода Калмана для непрерывно-дискретных систем с математическими моделями (1), (2). При этом особую роль играет характеристическое тождество Грина–Лагранжа, позволяющее эффективно решать задачи анализа и синтеза.

Характеристическое тождество Грина–Лагранжа. Будем рассматривать математическое описание непрерывно-дискретных систем управления (1). Запишем (1) в виде операторных уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x(t) &= f_1(t), \quad t \in T_i, \\ \mathcal{A}x(t_i) &= f_2(t_i), \quad t_i \in \Theta, \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathcal{A}x(t)$ и $\mathcal{A}x(t_i)$ – соответственно обыкновенный дифференциальный и конечно-разностный линейные операторы $\mathcal{A}: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ вида

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} - A_1(t)x(t), \\ \mathcal{A}x(t_i) &= x(t_{i+1}) - A_2(t_i)x(t_i), \end{aligned} \quad (4)$$

а f_1 и f_2 – n -векторы внешних воздействий, определенные как

$$\begin{aligned} f_1(t) &= B_1(t)u_1(t) + w_1(t), \\ f_2(t_i) &= B_2(t_i)u_2(t_i) + w_2(t_i). \end{aligned} \quad (5)$$

Такое представление математической модели непрерывно-дискретной системы можно трактовать как уравнение движения системы, описываемое первым уравнением системы (3), с многоточечными краевыми условиями, следующими из второго уравнения той же системы. Другими словами, конечно-разностные уравнения системы (3) определяют величину разрыва траектории системы.

По своему математическому описанию системы вида (3) принадлежат классу функционально-сложных динамических систем гриновского типа [16, 17]. Основой таких систем является применение общей методологии Грина-Лагранжа для формирования сопряженных операторов и билинейных функционалов как обобщенных элементов характеристики динамики исследуемых систем. В качестве аппарата решения задач анализа и синтеза рассматриваемых систем используется формализм Грина-Лагранжа, в основе которого лежит характеристическое тождество системы или формула Грина

$$\int_{t_1}^{t_2} [X^T(t)(\mathcal{A}Y)(t) - (\mathcal{A}^*X^T)(t)Y(t)]dt = L_{\mathcal{A}}[X^T, Y](t) \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Конструирование этого тождества порождает по линейному оператору системы \mathcal{A} и согласованными с ним матричными функциями $Y(t)$ и $X(t)$ два новых объекта: линейный оператор \mathcal{A}^* , сопряженный в смысле Лагранжа оператору \mathcal{A} , и билинейный матричный функционал $L_{\mathcal{A}}$ (конкомитант Лагранжа). Если для линейного оператора \mathcal{A} можно построить такое тождество, то оно называется гриновским. Значение билинейного матричного функционала $L_{\mathcal{A}}$ в момент времени t определяется значениями матричных функций $Y(\cdot)$ слева и $X(\cdot)$ справа от t соответственно, что является следствием свойства неупреждаемости (причинности) оператора \mathcal{A} , характерного для моделей реальных динамических систем и процессов. Прямой \mathcal{A} и сопряженный \mathcal{A}^* операторы, билинейный функционал $L_{\mathcal{A}}$, их динамические свойства полностью характеризуют исследуемую систему и в этом смысле называются элементами характеристики. Связаны эти элементы описания системы характеристическим тождеством. Оно является конструктивным объектом, т.е. с его помощью можно строить элементы характеристики для конкретных типов линейных функционально-сложных динамических систем.

Тождество Грина является характеристическим в том смысле, что оно по заданному оператору системы \mathcal{A} определяет сопряженный оператор и билинейный функционал, являющиеся обобщенными элементами характеристики системы.

Построим характеристическое тождество для непрерывно-дискретных систем, заданных в форме (3), (4), используя правило множителей Лагранжа [18]. Для этого умножим операторы $(\mathcal{A}x)(\tau)$ и $(\mathcal{A}x)(t_i)$ слева соответственно на матрицы $Z(\tau)$ и $Z(t_i)$ размерности $n \times n$, вид которых определяется ниже. Первое произведение проинтегрируем по τ в пределах от t_0 до t , а второе просуммируем по i от 1 до $k(t)$, где $k(t) = \max\{m: t_m \leq t, t_m \in \Theta\}$. Сложим полученные результаты и образуем функционал

$$J = \int_{t_0}^t Z(\tau)(\mathcal{A}x)(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{k(t)} Z(t_i)(\mathcal{A}x)(t_i). \quad (6)$$

Осуществим ряд тождественных преобразований, введя обозначение для сопряженного с $(\mathcal{A}x)(\tau)$ оператора $(\mathcal{A}^*Z)(\tau)$ и запишем функционал (6) в виде

$$J = \int_{t_0}^t (\mathcal{A}^*Z)(\tau)x(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{k(t)} (\mathcal{A}^*Z)(t_{i-1})x(t_{i-1}) + Z(\tau)x(\tau)|_{t_0}^t, \quad (7)$$

где

$$(\mathcal{A}^*Z)(\tau) = -\frac{d}{d\tau}Z(\tau) - Z(\tau)A_1(\tau), \quad (8)$$

$$(\mathcal{A}^*Z)(t_{i-1}) = Z(t_{i-1}) - Z(t_i)A_2(t_i). \quad (9)$$

Запишем характеристическое тождество Грина-Лагранжа для непрерывно-дискретных систем, математическая модель которых задана уравнениями (3), (4), (5)

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t Z(\tau)(\mathcal{A}x)(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{k(t)} Z(t_i)(\mathcal{A}x)(t_i) - \\ & \int_{t_0}^t (\mathcal{A}^*Z)(\tau)x(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{k(t)} (\mathcal{A}^*Z)(t_{i-1})x(t_{i-1}) = \\ & = \beta(Z, x)(t) - \beta(Z, x)(t_0). \end{aligned} \quad (10)$$

В соотношении (9) $\beta(Z, x)(\cdot) = Z(\cdot)x(\cdot)$ – билинейная форма.

Тождество (10) является характеристическим тождеством Грина-Лагранжа для непрерывно-дискретных систем, математическая модель которых задана операторными уравнениями (3) с определением исходных параметров (4).

Матрица Z определяется однородными уравнениями на полуинтервалах T_i и на последовательности с помощью сопряженного оператора $\mathcal{A}^*: T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Также требуется, чтобы матрица Z в момент времени t обращалась в единичную. В результате получаем описание

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}^*Z)(\tau) = 0, \quad \tau \in T_i, \\ & (\mathcal{A}^*Z)(t_{i-1}) = 0, \quad t_i \in \Theta, \\ & Z(t) = I_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку матрица Z , удовлетворяющая уравнениям (11) при $\tau = t$ принимает фиксированное значение, то она по существу является функцией двух переменных – текущего аргумента τ , $t_0 \leq \tau < t$ и момента наблюдения за поведением системы t . Желая это подчеркнуть, для матрицы Z можно ввести обозначение $G(t, \tau)$.

С учетом свойств матрицы Z из характеристического тождества (10) следует представление решений непрерывно-дискретной системы (3) в виде аналога формулы Коши из теории обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x(t) = G(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t G(t, \tau)f_1(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{k(t)} G(t, t_i)f_2(t_i), \quad (12)$$

где $G(t, \cdot)$ – матрица весовых функций системы или матричная функция Грина, причем $G(t, \cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Оптимальное оценивание состояния линейных нестационарных непрерывно-дискретных систем. Задача оптимального оценивания состояния линейных нестационарных непрерывно-дискретных систем математически эквивалентны детерминированной задаче оптимального управления сопряженной системой по квадратическому критерию качества.

Сформулируем задачу фильтрации, являющуюся обобщением на непрерывно-дискретные системы задачи Калмана.

Пусть рассматривается линейный нестационарный непрерывно-дискретный объект, заданный операторными уравнениями

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}x(t) = B_1(t)w_1(t) + E_1(t)f_1(t), \quad t \in T_i, \\ & \mathcal{A}x(t_i) = B_2(t_i)w_2(t_i) + E_2(t_i)f_2(t_i), \quad t_i \in \Theta, \\ & x(t_0) = x_0. \end{aligned} \quad (13)$$

где операторы $\mathcal{A}: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеют вид (4).

В соотношении (13) w_1 и w_2 – непрерывный и дискретный белые шумы, а f_1 и f_2 – непрерывные и дискретные управляющие, либо возмущающие детерминированные воздействия соответственно.

Пусть также известны уравнения наблюдений за поведением системы

$$\begin{aligned} & y_1(t) = C_1(t)x(t) + v_1(t) + \xi_1(t), \quad t \in T_i, \\ & y_2(t_i) = C_2(t_i)x(t_i) + v_2(t_i) + \xi_2(t_i), \quad t_i \in \Theta, \end{aligned} \quad (14)$$

где w_1 и w_2 – соответственно непрерывный и дискретный белые шумы, характеризующие случайные флуктуации измерений, а ξ_1 и ξ_2 – известные детерминированные непрерывная и дискретная величины, появление которых в уравнениях измерений обусловлено систематическими погрешностями измерений.

Предполагаем, что x_0 гауссовый случайный вектор с характеристиками

$$\begin{aligned} E[x(t_0)] &= m_x(t_0), \\ E[(x(t_0) - m_x(t_0))(x(t_0) - m_x(t_0))^T] &= P_0, \end{aligned} \quad (15)$$

где E – оператор математического ожидания. Также известны статистические характеристики гауссовых случайных процессов и последовательностей, входящих в уравнение (13), (14)

$$\begin{aligned} E[w_1(t)] &= m_{w_1}(t), E\left[(w_1(t) - m_{w_1}(t))(w_1(\tau) - m_{w_1}(\tau))^T\right] = Q_1(t)\delta(t - \tau), \\ E[w_2(t_i)] &= m_{w_2}(t_i), E\left[(w_2(t_i) - m_{w_2}(t_i))(w_2(t_j) - m_{w_2}(t_j))^T\right] = Q_2(t_j)\delta_{ij}, \\ E[v_1(t)] &= m_{v_1}(t), E\left[(v_1(t) - m_{v_1}(t))(v_1(\tau) - m_{v_1}(\tau))^T\right] = R_1(t)\delta(t - \tau), \\ E[v_2(t_i)] &= m_{v_2}(t_i), E\left[(v_2(t_i) - m_{v_2}(t_i))(v_2(t_j) - m_{v_2}(t_j))^T\right] = R_2(t_j)\delta_{ij}, \\ E\left[(w_1(t) - m_{w_1}(t))(v_1(\tau) - m_{v_1}(\tau))^T\right] &= S_1(t)\delta(t - \tau), \\ E\left[(w_2(t_i) - m_{w_2}(t_i))(v_2(t_j) - m_{v_2}(t_j))^T\right] &= S_2(t_j)\delta_{ij}, \\ E\left[(w_1(t) - m_{w_1}(t))(w_2(t_i) - m_{w_2}(t_i))^T\right] &= 0, \\ E\left[(w_1(t) - m_{w_1}(t))(v_2(t_i) - m_{v_2}(t_i))^T\right] &= 0, \\ E\left[(v_1(t) - m_{v_1}(t))(w_2(t_i) - m_{w_2}(t_i))^T\right] &= 0, \\ E\left[(v_1(t_i) - m_{v_1}(t_i))(v_2(t_j) - m_{v_2}(t_j))^T\right] &= 0, \end{aligned}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, матрицы P_0 , Q_1 , Q_2 симметричны и положительно полуопределены, а матрицы R_1 , R_2 симметричны и положительно определены. Начальное состояние x_0 некоррелировано с шумами v_1 , v_2 , w_1 и w_2 .

Задачу фильтрации по аналогии с [19] сформулируем следующим образом. Необходимо по результатам измерений (14) построить оптимальную оценку \hat{x} вектора состояния системы в любой произвольный фиксированный момент времени $\Theta \geq t_0$.

Оценку будем искать в классе линейных оценок вида

$$a^T \hat{x}(\Theta) = b^T m_x(t_0) - \int_{t_0}^{\Theta} u_1^T(t) y_1(t) dt - \sum_{i=1}^{k(\Theta)} u_2^T(t_i) y_2(t_i), \quad (16)$$

обеспечивающих минимум функционалу

$$J = E[\{a^T [x(\Theta) - \hat{x}(\Theta)]\}^2]. \quad (17)$$

Выражение (16) определяет структуру непрерывно-дискретной системы, на вход которой поступают сигналы от измерительных устройств y_1 , y_2 , а на выходе формируется оценка вектора состояний системы (13).

Задачу также можно сформулировать следующим образом. Необходимо определить, каким условиям подчиняются векторы b , u_1 , u_2 , обеспечивающие оптимальность оценке \hat{x} .

Используя уравнения измерений (14) и второе уравнение системы (13) преобразуем выражение для оценки (16) (далее аргументы для матриц системы (13) и уравнений (15) при необходимости, для простоты записи будем опускать)

$$a^T \hat{x}(\Theta) = b^T m_x(t_0) - \int_{t_0}^{\Theta} u_1^T(t) [C_1 x(t) + v_1(t) + \xi_1(t)] dt - \sum_{i=1}^{k(\Theta)} u_2^T(t_i) [C_2 A_2 x(t_{i-1}) + C_2 B_2 w_2(t_i) + C_2 E_2 f_2(t_{i-1}) + v_2(t_i) + \xi_2(t_i)]. \quad (18)$$

Представляя характеристическое тождество Грина-Лагранжа для системы (13) в виде

$$z^T(\Theta)x(\Theta) = z^T(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{\Theta} [z^T(t)B_1 w_1(t) + z^T(t)E_1 f_1(t) - (\mathcal{A}^* z^T)x(t)] dt + \sum_{i=1}^{k(\Theta)} [z^T(t_i)B_2 w_2(t_i) + z^T(t_i)E_2 f_2(t_{i-1}) - (\mathcal{A}^* z^T)(t_{i-1})x(t_{i-1})], \quad (19)$$

и вычитая из него соотношение (18) получаем

$$z^T(\Theta)x(\Theta) - a^T \hat{x}(\Theta) = z^T(t_0)x(t_0) - b^T m_x(t_0) + \int_{t_0}^{\Theta} [-(\mathcal{A}^* z^T)x(t) + u_1^T(t)C_1]x(t) dt + \sum_{i=1}^{k(\Theta)} [-(\mathcal{A}^* z^T)(t_{i-1})x(t_{i-1}) + u_2^T(t_i)C_2 A_2]x(t_{i-1}) + \int_{t_0}^{\Theta} [z^T(t)B_1 w_1(t) + z^T(t)E_1 f_1(t) + u_1^T(t)v_1(t) + u_1^T(t)\xi_1(t)] dt + \sum_{i=1}^{k(\Theta)} [z^T(t_i)B_2 w_2(t_i) + z^T(t_i)E_2 f_2(t_{i-1}) + u_2^T(t_i)C_2 B_2(t_i) + u_2^T(t_i)C_2 E_2 f_2(t_{i-1})v_2(t_i) + u_2^T(t_i)\xi_2(t_i)]. \quad (20)$$

Определим сопряженную непрерывно-дискретную систему следующим образом

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^* z^T)(t) &= u_1^T(t)C_1(t), \quad t \in T_i, \\ (\mathcal{A}^* z^T)(t_{i-1}) &= u_2^T(t_i)C_2(t_i)A_2(t_i), \quad t_i \in \Theta, \\ z^T(\Theta) &= a^T. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда выражение (20) примет вид

$$\begin{aligned} a^T [x(\Theta) - \hat{x}(\Theta)] &= z^T(t_0)x(t_0) - b^T m_x(t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^{\Theta} [z^T(t)B_1 w_1(t) + z^T(t)E_1 f_1(t) + u_1^T(t)v_1(t) + u_1^T(t)\xi_1(t)] dt + \\ &+ \sum_{i=1}^{k(\Theta)} [z^T(t_i)B_2 w_2(t_i) + z^T(t_i)E_2 f_2(t_{i-1}) + u_2^T(t_i)C_2 B_2(t_i) + \\ &+ u_2^T(t_i)C_2 E_2 f_2(t_{i-1})v_2(t_i) + u_2^T(t_i)\xi_2(t_i)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Применяя к обеим частям (22) операцию математического ожидания, можно определить условие безусловной несмещенности оценки \hat{x}

$$E[a^T \{x(\Theta) - \hat{x}(\Theta)\}] = 0$$

в форме

$$\begin{aligned} b^T m_x(t_0) &= z^T(t_0)m_x(t_0) + \int_{t_0}^{\Theta} \{z^T(t)[B_1 m_{w_1}(t) + E_1 f_1(t)] + u_1^T(t)[m_{v_1}(t) + \xi_1(t)]\} dt + \\ &+ \sum_{i=1}^{k(\Theta)} \{z^T(t_i)[B_2 m_{w_2}(t_i) + E_2 f_2(t_{i-1})] + \\ &+ u_2^T(t_i)[C_2 B_2 m_{w_2}(t_i) + C_2 E_2 f_2(t_{i-1}) + m_{v_2}(t_i) + \xi_2(t_i)]\}, \end{aligned} \quad (23)$$

что фактически накладывает условие на вектор b .

Учитывая (22) и (23) и выполняя преобразования с учетом априорных данных сформируем функционал в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= z^T(t_0)P_0 z(t_0) + \int_{t_0}^{\Theta} [z^T(t)Q_1(t)z(t) + 2z^T(t)Q_{11}^T(t)u_1(t) + u_1^T(t)\mathcal{R}_1(t)u_1(t)] dt + \\ &+ \sum_{i=1}^{k(\Theta)} [z^T(t_i)Q_2(t_i)z(t_i) + 2z^T(t_i)Q_{22}^T(t_i)u_2(t_i) + u_2^T(t_i)\mathcal{R}_2(t_i)u_2(t_i)], \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= B_1(t)P_{11}(t)B_1^T(t), & Q_{11}(t) &= S_1^T(t)B_1^T(t), & \mathcal{R}_1(t) &= P_{21}(t), \\ Q_2(t_i) &= B_2(t_i)P_{12}(t_i)B_2^T(t_i), & Q_{22}(t_i) &= S^T(t_i)B_2^T(t_i)P_{12}(t_i)B_2^T(t_i), \\ \mathcal{R}_2(t_i) &= C_2(t_i)B_2(t_i)P_{12}(t_i)C_2^T(t_i) + C_2(t_i)B_2(t_i)S_2(t_i) + \\ &+ S_2^T(t_i)B_2^T(t_i)C_2^T(t_i) + P_{22}(t_i). \end{aligned} \quad (25)$$

Предположим, что все взаимные и автоковариационные функции, входящие в выражении для матрицы \mathcal{R}_2 таковы, что эта матрица является несингулярной.

Для того, чтобы задача (21), (24) принадлежала к классу линейно-квадратических задач управления, должны выполняться условия для определяющих матриц [20]

$$P_0 \geq 0, \begin{bmatrix} Q_1(t) & Q_{11}^T(t) \\ Q_{11}(t) & \mathcal{R}_1(t) \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} Q_2(t_i) & Q_{22}^T(t_i) \\ Q_{22}(t_i) & \mathcal{R}_2(t_i) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (26)$$

Указанные условия выполняются. Первое условие выполняется, поскольку по постановке задачи матрица P_0 положительно полуопределена. Второе и третье условие доказывается, основываясь на том, что ковариационная матрица гауссова вектора положительно полуопределена.

Таким образом, приходим к задаче построения оптимального управления u_1, u_2 сопряженной с (13) непрерывно-дискретной линейной нестационарной детерминированной системой (21), доставляющий абсолютный минимум квадратическому функционалу (24). Это отражает принцип двойственности между задачами оптимальной линейной фильтрации и детерминированного линейно-квадратического оптимального управления в непрерывно-дискретных нестационарных системах.

Далее перейдем непосредственно к построению оптимального линейного нестационарного непрерывно-дискретного фильтра.

Прибавляя к функционалу (24) вспомогательное тождество метода дополнения до полного квадрата, развитого Лежандром применительно к задаче изучения вторых вариаций в вариационном управлении [21],

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [x^T(t)K(t)x(t)]dt + \sum_{i=1}^{k_f} [x^T(t_i)K(t_i)x(t_i) - x^T(t_{i-1})K(t_{i-1})x(t_{i-1})] = \\ = x^T(t_f)K(t_f)x(t_f) - x^T(t_0)K(t_0)x(t_0), \end{aligned}$$

в которое вместо $x(t)$, $K(t)$, t_f , K_f подставляем соответственно $z(t)$, $P(t)$, θ , $k(\theta)$, определяя матрицу ковариации ошибки оценивания $P(t)$ на решениях системы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(t) &= -A_1(t)P(t) - P(t)A_1^T(t) + Q_1(t) - \tilde{Q}_{11}^T(t)\tilde{\mathcal{R}}_1^{-1}(t)\tilde{Q}_{11}^T(t), \quad t \in T_i, \\ P(t_i) &= A_2(t_i)P(t_{i-1})A_2^T(t_i) + Q_2(t_i) - \tilde{Q}_{22}(t_i)\tilde{\mathcal{R}}_2^{-1}(t_i)\tilde{Q}_{22}(t_i), \quad t_i \in \Theta, \\ P(t_0) &= P_0, \end{aligned} \quad (27)$$

выполняя преобразования, получим функционал в виде

$$\begin{aligned} J = z^T(\cdot)P(\cdot)z(\cdot) + \int_{t_0}^{\cdot} [u_1(t) + \mathcal{R}_1^{-1}(t)\tilde{Q}_{11}z(t)]^T \mathcal{R}_1(t) [u_1(t) + \mathcal{R}_1^{-1}(t)\tilde{Q}_{11}z(t)]dt + \\ + \sum_{i=1}^{k(\cdot)} [u_2(t_i) + \tilde{\mathcal{R}}_2^{-1}(t_i)\tilde{Q}_{22}z(t_i)]^T \tilde{\mathcal{R}}_2(t_i) [u_2(t_i) + \tilde{\mathcal{R}}_2^{-1}(t_i)\tilde{Q}_{22}z(t_i)], \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{11}(t) &= C_1(t)P(t) + Q_{11}(t), \quad \tilde{Q}_{22}(t_i) = C_2(t_i)A_2(t_i)P(t_{i-1})A_2^T(t_i) + Q_{22}(t_i), \\ \tilde{\mathcal{R}}_2(t_i) &= \mathcal{R}_2(t_i)C_2(t_i)A_2(t_i)P(t_{i-1})A_2^T(t_i)C_2^T(t_i) \end{aligned}$$

и определим оптимальное управление непрерывно-дискретной системой (21) в виде

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\mathcal{R}_1^{-1}(t)\tilde{Q}_{11}z(t), \quad t \in T_i, \\ u_2(t_i) &= -\tilde{\mathcal{R}}_2^{-1}(t_i)\tilde{Q}_{22}z(t_i), \quad t_i \in \Theta. \end{aligned} \quad (29)$$

Минимальное значение функционала (24) определяется выражением

$$J_{opt} = z^T(\cdot)P(\cdot)z(\cdot) \quad (30)$$

Подставим полученное уравнение оптимального управления в уравнение системы (21)

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^*z^T)(t) &= -z^T(t)\tilde{Q}_{11}^T(t)\mathcal{R}_1^{-1}(t)C_1(t), t \in T_i, \\ (\mathcal{A}^*z^T)(t_{i-1}) &= -z^T(t_i)\tilde{Q}_{22}^T(t_i)\tilde{\mathcal{R}}_2^{-1}(t_i)C_2(t_i)A_2(t_i), t_i \in T, \\ z^T(\cdot) &= a^T \end{aligned} \quad (31)$$

и в представление оценки вектора состояния системы (13) с учетом условия безусловной несмещенности запишем характеристическое тождество Грина–Лагранжа для системы (28)

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{\cdot} [z^T(t)(\mathcal{A}\hat{x})(t) - (\mathcal{A}^*z^T)(t)\hat{x}(t)]dt + \\ &+ \sum_{i=1}^{k(\cdot)} [z^T(t_i)(\mathcal{A}\hat{x})(t_i) - (\mathcal{A}^*z^T)(t_{i-1})\hat{x}(t_{i-1})] = \\ &= z^T(\cdot)\hat{x}(\cdot) - z^T(t_0)\hat{x}(t_0). \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя в него уравнение (31) в результате получаем

$$\begin{aligned} &z^T(t_0)[\hat{x}(t_0) - m_x(t_0)] + \int_{t_0}^{\cdot} z^T(t)\{(\mathcal{A}\hat{x})(t) - B_1m_{w_1}(t) - E_1f_1(t) - \\ &- K(t)[y_1(t) - m_{v_1}(t) - \xi_1(t) - C_1\hat{x}(t)]\}dt + \\ &+ \sum_{i=1}^{k(\cdot)} z^T(t_i)\{(\mathcal{A}\hat{x})(t_i) - B_2m_{w_2}(t_i) - E_2f_2(t_{i-1}) - K(t_i) \times \\ &\times [y_2(t_i) - C_2B_2m_{w_2}(t_i) - C_2E_2f_2(t_{i-1}) - m_{v_2}(t_i) - \xi_2(t_i) - C_2A_2\hat{x}(t_{i-1})]\} = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} K(t) &= [P(t)C_1^T(t) + B_1(t)S_1(t)]R_1^{-1}(t), \\ K(t_i) &= [P_1(t_i)C_2^T(t_i) + B_2(t_i)S_2(t_i)][C_2(t_i)P_1(t_i)C_2^T(t_i) + \\ &+ C_2(t_i)B_2(t_i)S_2(t_i) + S_2^T B_2^T(t_i)C_2^T(t_i) + R_2(t_i)]^{-1}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$P_1(t_i) = A_2(t_i)P(t_{i-1})A_2^T(t_i) + B_2(t_i)Q_2(t_i)B_2^T(t_i). \quad (35)$$

Решение однородной непрерывно-дискретной системы (31) может быть представлено в виде

$$z(t) = G(t, \cdot)a, \quad \forall t \in T, \quad (36)$$

где $G(t, \cdot)$ – матрица весовых функций системы (31).

Запишем представление оценки вектора состояния системы (13) с учетом условия безусловной несмещенности $\hat{x}(\cdot)$ в виде

$$\begin{aligned} a^T\hat{x}(\cdot) &= z^T(t_0)m_x(t_0) + \int_{t_0}^{\cdot} z^T(t)[\Lambda_1(t) - \Pi_1(t)y_1(t)]dt + \\ &+ \sum_{i=1}^{k(\cdot)} z^T(t_i)[\Lambda_2(t_i) - \Pi_2(t_i)y_2(t_i)], \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1(t) &= B_1m_{w_1}(t) + E_1f_1(t) - \Pi_1(t)[m_{v_1}(t) + \xi_1(t)], \\ \Pi_1(t) &= \tilde{Q}_{11}^T(t)\mathcal{R}_1^{-1}(t), \quad \Pi_2(t_i) = \tilde{Q}_{22}^T(t_i)\tilde{\mathcal{R}}_2^{-1}(t_i), \\ \Lambda_2(t_i) &= B_2m_{w_2}(t_i) + E_2f_2(t_{i-1}) - \\ &- \Pi_2(t_i)[C_2B_2m_{w_2}(t_i) + C_2E_2f_2(t_{i-1}) + m_{v_2}(t_i) + \xi_2(t_i)], \end{aligned} \quad (38)$$

Анализ (34) позволяет сделать вывод, что оптимальная оценка вектора состояния непрерывно-дискретной системы (13) $\hat{x}(\theta)$ единственна и не зависит от выбора вектора a . Тогда необходимым и достаточным условием выполнения (33) является уравнения

$$\begin{aligned}
 (A\hat{x})(t) &= B_1(t)m_{w_1}(t) + E_1(t)f_1(t) + \\
 &+ K(t)[y_1(t) - m_{v_1}(t) - \xi_1(t) - C_1(t)\hat{x}(t)], t \in T_i, \\
 (A\hat{x})(t_i) &= B_2(t_i)m_{w_2}(t_i) - E_2(t_i)f_2(t_{i-1}) + \\
 &+ K(t_i)[y_2(t_i) - C_2(t_i)B_2(t_i)m_{w_2}(t_i) - C_2(t_i)E_2(t_i)f_2(t_{i-1}) - \\
 &- m_{v_2}(t_i) - \xi_2(t_i) - C_2(t_i)A_2(t_i)\hat{x}(t_{i-1})], t_i \in \Theta, \\
 \hat{x}(t_0) &= m_x(t_0),
 \end{aligned} \tag{39}$$

которые определяют конструкцию оптимального линейного нестационарного непрерывно-дискретного фильтра.

Таким образом получаем следующий результат.

Пусть необходимо построить оптимальную оценку \hat{x} вектора состояния хнепрерывно-дискретной системы (13) по результатам наблюдений (14) с известными априорными характеристиками случайных гауссовых вектора начального состояния системы, процессов и последовательностей, входящих в уравнения (13), (14). При этом оценка \hat{x} должна принадлежать классу линейных оценок вида (16) и обеспечивать абсолютный минимум функционалу (17). Тогда указанная оценка удовлетворяет системе (39), где матрица коэффициентов усиления фильтра K и матрица ковариаций ошибки оценивания P соответственно удовлетворяют уравнениям (34), (35), (36).

В том случае, когда все входящие в уравнения (13), (14) шумы центрированы, некоррелированы между собой и вектором начального состояния, а также отсутствует детерминированные слагаемые в правой части уравнений (13), (14), полученные уравнения упрощаются.

Тогда уравнения оптимального нестационарного непрерывно-дискретного фильтра будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 A\hat{x}(t) &= K(t)[y_1(t) - C_1(t)\hat{x}(t)], t \in T_i, \\
 A\hat{x}(t_i) &= K(t_i)[y_2(t_i) - C_2(t_i)A_2(t_i)\hat{x}(t_{i-1})], t_i \in \Theta, \\
 x(t_0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Уравнения для матричных коэффициентов усиления фильтра записываются в виде

$$\begin{aligned}
 K(t) &= P(t)C_1^T(t)R_1^{-1}(t), t \in T_i, \\
 K(t_i) &= P_1(t_i)C_2^T(t_i)[C_2(t_i)P_1(t_i) + R_2(t_i)]^{-1}, t_i \in \Theta,
 \end{aligned} \tag{41}$$

а уравнение для ковариационной матрицы ошибки оценивания имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(t)}{dt} &= A_1(t)P(t) + P(t)A_1^T(t) + B_1(t)Q_1(t)B_1^T(t) - P(t)C_1^T(t)R_1^{-1}(t)C_1(t)P(t), t \in T_i, \\
 P(t_{i-1}) &= P_1(t_i) - P_1(t_i)C_2^T(t_i)[C_2(t_i)P_1(t_i)C_2^T(t_i) + R_2(t_i)]^{-1}C_2(t_i)P_1(t_i), t_i \in \Theta, \\
 P_1(t_i) &= A_2(t_i)P(t_{i-1})A_2^T(t_i) + B_2(t_i)Q_2(t_i)B_2^T(t_i), \\
 P(t_0) &= P_0.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Алгоритм комплексирования. В настоящей работе предлагается комплексирование дискретного и непрерывного каналов посредством решения непрерывной части уравнения для оценки (40) на каждом интервале дискретного времени $[t_i, t_{i+1}] \in \Theta$. При этом начальные условия решения $x(0) = x(t_i)$ равны оценке дискретного фильтра $\hat{x}(t_i)$, который предполагается более точным, но проигрывающим в частоте оценки.

Расчеты. Рассмотрим открытый контур системы управления погружением АНПА. Предполагается наличие дискретного и непрерывного измерителя глубины. Модель динамики и измерений непрерывной составляющей из уравнений (1) описывается матрицами

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \quad 0].$$

Дискретная составляющая определяется иными матрицами состояния:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.4424 \\ 0 & 0.7788 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.001152 \\ 0.004424 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [1 \quad 0].$$

В качестве эксперимента на входы u_1 и u_2 воздействует синусоидальный сигнал, интерпретируемый как сила воздействия на АНПА. Длительность процесса определяется множеством $T = [0, 30]$, а моменты функционирования дискретной подсистемы $\Theta = \{0, 0.5, \dots, 30\}$. Вектор начального состояния при этом нулевой: $x(0) = [0 \quad 0]^T$, а матрица P_0 определяется из уравнения (15).

Шумовые воздействия w_1 и v_1 имеют идентичную ковариацию, а именно $Q_1 = R_1 = 0.01$. При этом, дискретный измеритель практически не подвержен влиянию шумов w_2 и v_2 , значит $Q_2 = R_2 = 0$.

Результаты моделирования системы по уравнениям (40), (41) и (42) приведены на рис. 1, где построены ошибки оценки глубины АНПА.

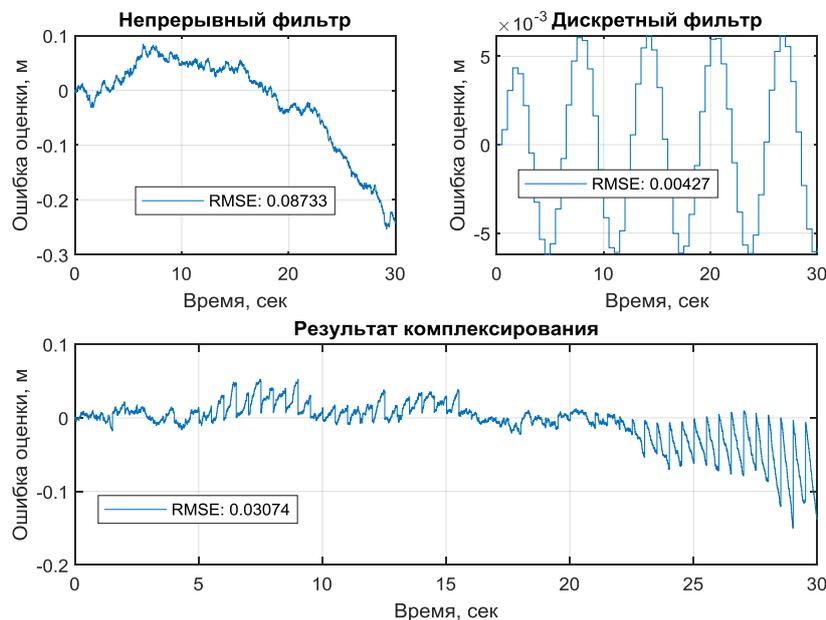


Рис. 1. Результаты моделирования

Графики ошибок относительно истинного состояния не зашумлённой системы для непрерывного и дискретного фильтров показывают, что последний значительно выигрывает в точности, однако не способен производить оценку состояния в реальном времени. Результат комплексирования показал, что среднеквадратическая ошибка (RMSE) в сравнении с непрерывным фильтром меньше на 35,2%, что подтверждает эффективность предложенного подхода.

Заключение. В результате проведенного исследования был разработан и обоснован алгоритм оптимального комплексирования оценки состояний в дискретно-непрерывных системах автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА). Предложенный подход демонстрирует высокую эффективность в повышении точности и надежности оценки параметров состояния АНПА путем оптимального объединения данных из различных источников информации.

Разработанный алгоритм обладает значительным потенциалом для применения в широком спектре областей, связанных с обработкой информации в сложных технических системах.

Важно отметить, что предложенный подход обладает гибкостью и масштабируемостью. Он может быть адаптирован для работы с большим количеством источников информации, что позволяет расширить его применимость в более сложных системах. Кроме того, алгоритм может быть модифицирован для использования в различных типах дискретно-непрерывных систем, не ограничиваясь только АНПА.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Fossen T. I.* Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control. – Hoboken, NJ Chichester, West Sussex: Wiley, 2021. – Second ed. – 710 c.
2. *Antonelli G.* Underwater Robots. – Cham: Springer International Publishing, 2018.
3. *Kramar V., Kabanov A., Dementiev K.* Autonomous Underwater Vehicle Navigation via Sensors Maximum-Ratio Combining in Absence of Bearing Angle Data // *JMSE*. – 2023. – Vol. 11, No. 10. – P. 1847.
4. *Щербатюк А.Ф.* О методе навигации группы АНПА без использования гидроакустических маяков // *Гироскопия и навигация*. – 2022. – Т. 30, № 4 (119). – С. 106-121.
5. *Jeong D. B., Ko N. Y.* Sensor Fusion for Underwater Vehicle Navigation Compensating Misalignment Using Lie Theory // *Sensors*. – 2024. – Vol. 24, No. 5. – P. 1653.
6. *Nicosevici T. et al.* A review of sensor fusion techniques for underwater vehicle navigation // *Oceans '04 MTS/IEEE Techno-Ocean '04* (IEEE Cat. No.04CH37600). – Kobe, Japan: IEEE, 2004. – P. 1600-1605.
7. *Лазаренко А.Н.* Комплексование ИНС и Ганс (GPS) фильтром Калмана // *Вологдинские чтения*. – 2008. – № 69.
8. *Вавилова Н.Б., Парусников Н.А., Субханкулова Г.А.* Навигация автономного подводного аппарата при помощи корректируемой бескарданной инерциальной навигационной системы // *Тр. МАИ*. – 2016. – № 89.
9. *Xincun Y. и др.* Kalman filter applied in underwater integrated navigation system // *Geodesy and Geodynamics*. – 2013. – Vol. 4, No. 1. – P. 46-50.
10. *Potokar E., Norman K., Mangelson J.* Invariant Extended Kalman Filtering for Underwater Navigation // *IEEE Robot. Autom. Lett.* – 2021. – Vol. 6, No. 3. – P. 5792-5799.
11. *Singh R.K., Saha J., Bhaumik S.* Maximum Correntropy Polynomial Chaos Kalman Filter for Underwater Navigation. – 2024.
12. *Sheng G. et al.* Cooperative Navigation Algorithm of Extended Kalman Filter Based on Combined Observation for AUVs // *Remote Sensing*. – 2023. – Vol. 15, No. 2. – P. 533.
13. *Allotta B. и др.* Sea currents estimation during AUV navigation using Unscented Kalman Filter // *IFAC-PapersOnLine*. – 2017. – Vol. 50, No. 1. – P. 13668-13673.
14. *Tijjani A.S. et al.* Continuous–Discrete Observation-Based Robust Tracking Control of Underwater Vehicles: Design, Stability Analysis, and Experiments // *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.* – 2023. – Vol. 31, No. 4. – P. 1477-1492.
15. *Andrienko A. Ya. et al.* On-Board Terminal Control Systems: Specifics and Design Concepts // *IFAC Proceedings Volumes*. – 1975. – Vol. 8, No. 1. – P. 464-471.
16. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. II. – 6-е изд., дополн. – М.: МЦНМО, 2012. – 818 с.
17. *Барабанов А.Т.* Анализ и оптимизация функционально сложных систем гриновского типа на основе характеристического тождества // *Адаптивные системы автоматического управления*. – 1981. – № 9. – С. 3-12.
18. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
19. *Острем К.Ю.* Введение в стохастическую теорию управления: пер. с англ. – М.: Мир, 1973. – 324 с.
20. *Casti J.* The linear-Quadratic Control Problem: Some Recent Results and Outstanding Problems // *SIAM Rev.* – 1980. – Vol. 22, No. 4. – P. 459-485.
21. *Зеликин М.И.* Оптимальное управление и вариационное исчисление. – 4-е изд., испр. – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 160 с.

REFERENCES

1. *Fossen T.I.* Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control. Hoboken, NJ Chichester, West Sussex: Wiley, 2021. Second ed., 710 p.
2. *Antonelli G.* Underwater Robots. Cham: Springer International Publishing, 2018.
3. *Kramar V., Kabanov A., Dementiev K.* Autonomous Underwater Vehicle Navigation via Sensors Maximum-Ratio Combining in Absence of Bearing Angle Data, *JMSE*, 2023, Vol. 11, No. 10, pp. 1847.

4. *Shcherbatyuk A.F.* O metode navigatsii gruppy ANPA bez ispol'zovaniya gidroakusticheskikh mayakov [On the method of navigation of a group of AUVs without the use of hydroacoustic beacons], *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation], 2022, Vol. 30, No. 4 (119), pp. 106-121.
5. *Jeong D. B., Ko N. Y.* Sensor Fusion for Underwater Vehicle Navigation Compensating Misalignment Using Lie Theory, *Sensors*, 2024, Vol. 24, No. 5, pp. 1653.
6. *Nicosevici T. et al.* A review of sensor fusion techniques for underwater vehicle navigation, *Oceans '04 MTS/IEEE Techno-Ocean '04 (IEEE Cat. No.04CH37600)*. Kobe, Japan: IEEE, 2004, pp. 1600-1605.
7. *Lazarenko A.N.* Kompleksirovanie INS i Gans (GPS) fil'trom Kalmana [Integration of INS and HANS (GPS) with Kalman filter], *Vologdinskie chteniya* [Vologda readings], 2008, No. 69.
8. *Vavilova N.B., Parusnikov N.A., Subkhankulova G.A.* Navigatsiya avtonomnogo podvodnogo apparata pri pomoshchi korrektiruemy beskardannoy inertsiyal'noy navigatsionnoy sistemy [Navigation of an autonomous underwater vehicle using a corrected strapdown inertial navigation system], *Tr. MAI* [Trudy MAI], 2016, No. 89.
9. *Xincun Y. u dr.* Kalman filter applied in underwater integrated navigation system, *Geodesy and Geodynamics*, 2013, Vol. 4, No. 1, pp. 46-50.
10. *Potokar E., Norman K., Mangelson J.* Invariant Extended Kalman Filtering for Underwater Navigation, *IEEE Robot. Autom. Lett.*, 2021, Vol. 6, No. 3, pp. 5792-5799.
11. *Singh R.K., Saha J., Bhaumik S.* Maximum Correntropy Polynomial Chaos Kalman Filter for Underwater Navigation, 2024.
12. *Sheng G. et al.* Cooperative Navigation Algorithm of Extended Kalman Filter Based on Combined Observation for AUVs, *Remote Sensing*, 2023, Vol. 15, No. 2, pp. 533.
13. *Allotta B. u dr.* Sea currents estimation during AUV navigation using Unscented Kalman Filter, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, Vol. 50, No. 1, pp. 13668-13673.
14. *Tijjani A.S. et al.* Continuous–Discrete Observation-Based Robust Tracking Control of Underwater Vehicles: Design, Stability Analysis, and Experiments, *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.*, 2023, Vol. 31, No. 4, pp. 1477-1492.
15. *Andrienko A. Ya. et al.* On-Board Terminal Control Systems: Specifics and Design Concepts, *IFAC Proceedings Volumes*, 1975, Vol. 8, No. 1, pp. 464-471.
16. *Zorich V.A.* Matematicheskii analiz [Mathematical analysis]. Part II. 6th ed. Moscow: MTSNMO, 2012, 818 p.
17. *Barabanov A.T.* Analiz i optimizatsiya funktsional'no slozhnykh sistem grinovskogo tipa na osnove kharakteristicheskogo tozhdestva [Analysis and optimization of functionally complex Green-type systems based on characteristic identity], *Adaptivnye sistemy avtomaticheskogo upravleniya* [Adaptive automatic control systems], 1981, No. 9, pp. 3-12.
18. *Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V.* Optimal'noe upravlenie [Optimal control]. Moscow: Nauka, 1979, 432 p.
19. *Ostrem K.Yu.* Vvedenie v stokhasticheskuyu teoriyu upravleniya [Introduction to stochastic control theory]; trans. from english. Moscow: Mir, 1973, 324 p.
20. *Casti J.* The linear-Quadratic Control Problem: Some Recent Results and Outstanding Problems, *SIAM Rev.*, 1980, Vol. 22, No. 4, pp. 459-485.
21. *Zelikin M.I.* Optimal'noe upravlenie i variatsionnoe ischislenie [Optimal control and calculus of variations]. 4th ed. Moscow: LENAND, 2017, 160 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Ю.А. Кравченко.

Кабанов Алексей Александрович – Севастопольский государственный университет; e-mail: kabanovaleksey@gmail.com; г. Севастополь, Россия; тел.: +79787622582; кафедра «Информатика и управление в технических системах»; к.т.н.; доцент; зав. кафедрой.

Крамарь Вадим Александрович – e-mail: kramarv@mail.ru; тел.: +79787927340; кафедра «Информатика и управление в технических системах»; д.т.н.; профессор.

Дементьев Кирилл Валерьевич – e-mail: mash.saigon.89@gmail.com; тел.: +79788857479; кафедра «Информатика и управление в технических системах»; аспирант.

Kabanov Aleksey Aleksandrovich – Sevastopol State University; e-mail: kabanovaleksey@gmail.com; Sevastopol, Russia; phone: +79787622582; the Department of «Informatics and Control in Technical Systems»; cand. of eng. sc.; associate professor; department head.

Kramar Vadim Aleksandrovich – e-mail: kramarv@mail.ru; phone: +79787927340; the Department of «Informatics and Control in Technical Systems»; dr. of eng. sc.; professor.

Dementiev Kirill Valerievich – e-mail: mash.saigon.89@gmail.com; phone: +79788857479; the Department of «Informatics and Control in Technical Systems»; postgraduate student.