Зарубин Денис Михайлович – Юго-Западный государственный университет; e-mail: orion-589@yandex.ru; г. Курск, Россия; научный сотрудник научно-исследовательского института космического приборостроения и радиоэлектронных систем.

Добрица Вячеслав Порфирьевич – e-mail: dobritsa@mail.ru; профессор кафедры защиты информации; д.ф.-м.н.

Титенко Евгений Анатольевич – e-mail: johntit@mail.ru; тел.: +79051588904; ведущий научный сотрудник научно-исследовательского института космического приборостроения и радиоэлектронных систем; к.т.н.

Zarubin Denis Mikhailovich – South-West State University; e-mail: orion-589@yandex.ru; Kursk, Russia; researcher at the Research Institute of Space Instrumentation and Radioelectronic Systems.

Dobritsa Vyacheslav Porfiryevich – e-mail: dobritsa@mail.ru; professor of the Information Security Department; dr. of phys. and math. sc.

Titenko Evgeny Anatolyevich – e-mail: johntit@mail.ru; phone: +79051588904; leading researcher of the Research Institute of Space Instrumentation and Radioelectronic Systems; cand. of eng. sc.

УДК 517.524 DOI 10.18522/2311-3103-2022-5-29-37

В.Е. Долгой, И.Э. Гамолина

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПРИВЕДЕННОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

Приводится алгоритм, основанный на применении непрерывных дробей, для нахождения нулей полинома n-й степени. В настоящее время существует большое разнообразие методов и алгоритмов для решения задач подобного типа; отличительной особенностью предлагаемого алгоритма является возможность его эффективного использования при достаточно больших значениях n, кроме того, данный алгоритм применим в случае наличия комплексных корней. Любое действительное число можно представить в виде конечной или бесконечной непрерывной цепной дроби. Основное назначение цепных дробей состоит в том, что они дают малую погрешность при приближенных вычислениях действительных чисел в виде обыкновенных дробей при решении алгебраических уравнений и систем. Целью нашей работы является применение разработанного алгоритма для решения полиномиальных уравнений, содержащих не только действительные, но и комплексные корни, с помощью непрерывных дробей; оценка числа арифметических шагов при его численном решении. В статье приводятся аналитические выражения для решения полиномиального уравнения; полученные аналитические выражения представляют собой отношение определителей Теплица. Отличительной особенностью данных определителей является наличие в качестве диагональных элементов коэффициентов решаемого алгебраического уравнения. Для получения численного решения использован модифицированный алгоритм Рутисхаузера. Комплексные корни при решении уравнения могут быть найдены с помощью алгоритма для суммирования непрерывных дробей. В статье приводятся в качестве иллюстрации предлагаемого алгоритма результаты численного решения полиномиального уравнения пятой степени. Преимуществом алгоритма является малое количество затрачиваемых арифметических операций, возможность рассмотрения полиномов высокой степени, малая погрешность вычислений.

Модифицированный алгоритм Рутисхаузера; непрерывные дроби; алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей; определители Теплица; r/φ-алгоритм.

V.E. Dolgoy, I.E. Gamolina

ALGORITHM OF THE REDUCED POLYNOMIAL EQUATIONS SOLUTION USING CONTINUED FRACTIONS

The article presents an algorithm where continued fractions are used to find the zeros of nth degree polynomial. Our day there is a wide variety of methods and algorithms for solving such type problems. The proposed algorithm feature is its effective possibility using for large values of n. Besides this algorithm can be applied for complex roots. Any real number can be represented as a continued fraction: finite or infinite. The main purpose of continuous fractions is that they allow us to find good approximations of real numbers in the ordinary fractions form in algebraic equations and systems solution. The purpose of this work is algorithm with continued fractions for solving reduced polynomial equation that contains both real and complex roots, estimation of the number of arithmetic steps in its numerical solution. The analytical expressions for polynomial equation solutions are given in this paper. The obtained analytical expressions represent the ratio of the Toeplitz determinants. A distinctive feature of these determinants is the presence of coefficients of the solved algebraic equation as diagonal elements. A modified Rutishauser algorithm was used to obtain a numerical solution. Complex roots can be found using the summation algorithm of divergent continued fractions. As an illustration of the proposed algorithm the results of the numerical solution for fifth degree polynomial equation are given. The advantage of the algorithm is the small number of arithmetic operations required, the possibility of considering high-degree polynomials, and the small error of calculations.

Modified Rutishauser algorithm; continued fractions; algorithm for summation of divergent continued fractions; Toeplitz determinants.

Введение. Непрерывные дроби в настоящее время часто используют во многих областях математики, в частности вычислительной математике. при изучении вопросов, связанных с бесконечным делением и в теории приближения к действительным числам рациональными числами. Дроби такого типа помогают находить достаточно хорошие приближения для решения большого круга задач; в том числе непрерывные дроби могут быть применены для нахождения нулей функций, представляющих собой полиномы n-й степени. Большое количество работ посвящено изучению прямых и итерационных методов для решения задач подобного типа [1–5], преимущество предлагаемого алгоритма состоит в том, что он может быть эффективно использован при достаточно больших значениях n и может быть применен для отыскания корней (и действительных, и комплексных). Для решения уравнений степени n полиномиального типа предлагается модифицированный алгоритм, основанный на использовании формул Эйткена [6] и алгоритма Рутизхаузера [7]. Для определения комплексных корней может быть успешно применен метод суммирования расходящихся непрерывных дробей [8–10].

Постановка задачи. Рассмотрим полином степени *n*, записав его в следующем виде

$$f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n. \tag{1}$$

Тогда производящая функция для (1) имеет вид [1]

$$\frac{1}{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m + \ldots \,. \tag{1}$$

Отметим, что (1) – приведенное уравнение, а в выражениях (1) и (2) α_i – коэффициенты, стоящие перед переменной x, совпадают. В выражении (2) c_m можно найти, используя линейное уравнение (рекуррентное)

$$c_m = -(\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \ldots + \alpha_n c_{m-n}),$$

с заданными значениями $c_0 = 1$ и $c_1 = -\alpha_1$.

Используем для нахождения уравнения $f(x) = 0$ – то есть корней полиномиального уравнения

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0 \qquad (3)$$

метод Эйткена [6], позволяющий находить последовательно корни уравнения с помощью предела отношения определителей 1, 2,…, n-го порядков:

$$x_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{c_{k+1}}{c_k}, \qquad (4)$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_{k+1} & c_{k+2} \\ c_{k+2} & c_{k+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} \end{vmatrix}} : \frac{c_{k+1}}{c_k}\right) = \frac{x_1 x_2}{x_1} = x_2, \qquad (5)$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_{k+1} & c_{k+2} & c_{k+3} \\ c_{k+2} & c_{k+3} & c_{k+4} \\ c_{k+3} & c_{k+4} & c_{k+5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} & c_{k+2} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & c_{k+3} \\ c_{k+2} & c_{k+3} & c_{k+4} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{k+1} & c_{k+2} \\ c_{k+2} & c_{k+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} \end{vmatrix}}\right) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2} = x_3, \qquad (6)$$

$$x_n = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{H_n^{(k+1)}}{H_n^{(k)}} : \frac{H_{n-1}^{(k+1)}}{H_{n-1}^{(k)}}\right),$$

где

$$H_n^{(k)} = \begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{k+n-1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \cdots & c_{k+n} \\ . & . & \cdots & . \\ c_{k+n-1} & c_{k+n} & \cdots & c_{k+2n-2} \end{vmatrix}, \; H_0^{(k)} = 1.$$

Таким образом,

$$x_n = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_{k+1} & c_{k+2} & \cdots & c_{k+n} \\ c_{k+2} & c_{k+3} & \cdots & c_{k+n+1} \\ . & . & \cdots & . \\ c_{k+n} & c_{k+n+1} & \cdots & c_{k+2n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{k+n-1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \cdots & c_{k+n} \\ . & . & \cdots & . \\ c_{k+n-1} & c_{k+n} & \cdots & c_{k+2n-2} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{k+1} & c_{k+2} & \cdots & c_{k+n-1} \\ c_{k+2} & c_{k+3} & \cdots & c_{k+n} \\ . & . & \cdots & . \\ c_{k+n-1} & c_{k+n} & \cdots & c_{k+2n-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{k+n-2} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \cdots & c_{k+n-1} \\ . & . & \cdots & . \\ c_{k+n-2} & c_{k+n-1} & \cdots & c_{k+2n-4} \end{vmatrix}}\right). \qquad (7)$$

Необходимым является выполнение условия

$$|x_1| \geq |x_2| \geq |x_3| \geq \ldots \geq |x_n|.$$

Следует отметить, что применяемые формулы Эйткена имеют ограничения и справедливы для нахождения действительных корней уравнения (3). Для нахождения наибольшего по абсолютной величине действительного корня (3) используем метод Бернулли [11–12]. Поэтому зададимся целью применить r/φ алгоритм [6] для отыскания комплексных корней полиномиального уравнения (3). Для этого применим указанный алгоритм, основанный на суммировании расходящихся непрерывных дробей [13].

Аналитические решения. Преобразуем выражения для нахождения корней (4)-(7). Тогда выражение (4) можно представить как отношение определителей Теплица:

$$x_1 = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \quad (8)$$

С учетом (8), будут справедливы следующие выражения для нахождения корней.

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \quad (9)$$

$$x_3 = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & -\alpha_7 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_2 & -\alpha_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \quad (10)$$

……………………………………………………………………

$$x_i = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & -\alpha_{i+3} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-4} & -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \quad (11)$$

Следует отметить, что для любой подходящей дроби $\frac{P_k}{Q_k}$ к действительному числу x_i справедливо оценочное неравенство

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k^2}.$$

Каждое из выражений (8)–(11), которое по сути являются выражениями для корней уравнения (3), обозначим через $X_i^{(n)}$:

$$X_i^{(n)}{=}X_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n).$$

Заметим, что для полиномиальных уравнений (3), для которых n>4, $X_i^{(n)}$ аналогичны их записи для уравнений 2-го, 3-го и 4-го порядков [14].

В случае, когда корни (3) действительны, то их значения можно установить непосредственно, вычисляя значения определителей из (8)–(11). Введение (8)–(11) и их рассмотрение как непрерывных дробей специального вида, делает возможным упростить решение уравнение (3), применяя функции $X_i^{(n)}$, а также r/φ-алгоритм.

Если рассматривается приведенное полиномиальное уравнение (3) только с действительными коэффициентами α_i определители, используемые в формулах (8)–(11), тоже будут действительными числами. А если уравнение имеет комплексные корни следует дополнительно применять r/φ-алгоритм [15].

Считаем, что модуль и аргумент комплексного числа, являющегося корнем уравнения (3) для $X_i^{(n)}$, можно найти по формуле [16]:

$$r_0 = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\prod_{k=1}^{p} \left| X_{ip}^{(n)} \right|}, \tag{12}$$

$$|\phi_0| = \pi \lim_{p\to\infty} \frac{\boldsymbol{k_p}}{\boldsymbol{p}}, \tag{13}$$

Здесь $X_{ip}^{(n)}$– p-я подходящая дробь [9], k_p – число отрицательных подходящих дробей из p подходящих дробей.

Например, $X_{2p}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ определяются следующим образом:

$$X_{21}^{(n)} = \frac{|-\alpha_2|}{1} : \frac{|-\alpha_1|}{1},$$

$$X_{22}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{|-\alpha_2|} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{|-\alpha_1|},$$

$$X_{23}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_4 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}, \dots$$

Следует отметить, что, так как в выражения, стоящие в знаменателе входят определители, то рассматриваемые матрицы не должны быть плохо обусловленными [17, 18].

Численные результаты. Для нахождения подходящих цепных дробей в виде отношения определителей Теплица [19] можно использовать рекуррентный модифицированный алгоритм QD-алгоритм Рутисхаузера, который в упрощённой форме записи может быть представлен как [20]:

$$e_n^{(m)} = e_{n-1}^{(m+1)} + x_n^{(m+1)} - x_n^{(m)}, \tag{14}$$

$$x_{n+1}^{(m)} = x_n^{(m+1)} \cdot \frac{e_n^{(m+1)}}{e_n^{(m)}}. \tag{15}$$

На рис. 1 приведена схема применяемого алгоритма.

Пусть $e_0^m = 0$; $x_1^{(m)}$ – элементы первой строки представляют собой последовательные подходящие дроби Хессенберга [13]. Их значение удобнее вычислять, представляя (7) восходящей дробью.

$$x_1^m = (-\alpha_1) + \cfrac{(-\alpha_2) + \cfrac{(-\alpha_3) + \cfrac{\vdots + \cfrac{(-\alpha_n)}{x_1^{(m-n+1)}}}{x_1^{(m-3)}}}{x_1^{(m-2)}}}{x_1^{(m-1)}},\ m = 1,\ 2,\ \dots \quad (16)$$

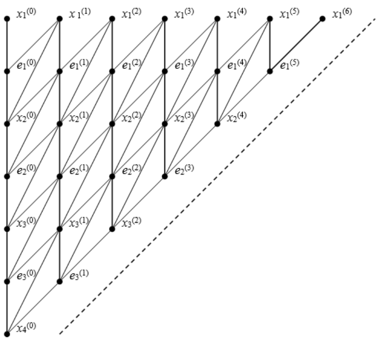

Рис. 1. Схема модифицированного алгоритма Рутисхаузера

Запишем (16) в эквивалентной форме

$$x_1^{(m)} = (-\alpha_1) + \frac{(-\alpha_2)}{x_1^{(m-1)}} + \frac{(-\alpha_3)}{x_1^{(m-2)}x_1^{(m-1)}} + \dots + \frac{(-\alpha_n)}{x_1^{(m-n+1)}x_1^{(m-n)}\dots x_1^{(m-1)}}. \quad (17)$$

В качестве примера применения описанного алгоритма рассмотрим решение нелинейного уравнения, имеющего комплексные корни:

$$x^5 - 4(1 + \cos 1)x^4 + (8 + 16\cos 1)x^3 - 16(1 + \cos 1)x^2 + 16x = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) имеет корни:

$$x_1 = 2, x_2 = 2\mathrm{e}^{i}, x_3 = 2e^{-i}, x_4 = 2, x_5 = 0.$$

На рис. 2 показано распределение подходящих дробей для (18).

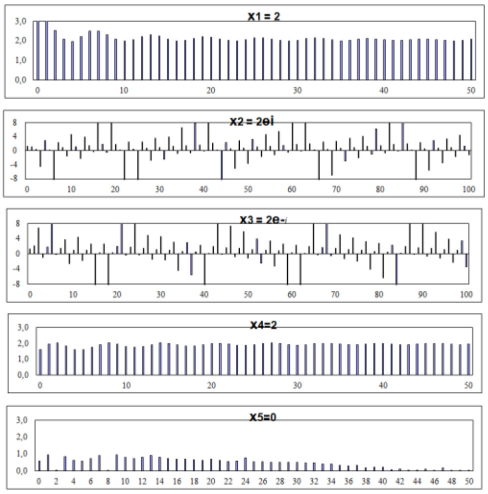

Рис. 2. Распределение подходящих дробей

Максимальное число шагов для заданной погрешности $\varepsilon = 10^{-3}$ составило N=48.

Заключение. Преимуществом предложенного в данной статье алгоритма отыскания корней (и комплексных в том числе) полиномиального уравнения степени n является малое количество затрачиваемых арифметических операций и простота в программировании.

Приведенные аналитические выражения для решения уравнения (3) позволяют исследовать полиномы n-й степени; устанавливать критерии отбора корней рассмотренного полиномиального уравнения. Рассмотренный алгоритм может быть успешно практически применен при исследовании математических моделей в гидравлике [21].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зеленова М.Е.* О решении полиномиальных уравнений в произвольных порядках // Чебышевский сборник. – 2015. – № 2 (54). – С. 117-121.
2. *Dixon J.D.* Exact Solution of Linear Equations Using P-Adic Expansions // Numerische Mathematik. – 1982. – Vol. 40. – P. 137-141.
3. *Cohen H.* A Course in Computational Algebraic Number Theory. – New York: Springer, 1996. – 545 p.
4. *Руйе Ф., Циммерман П.* Эффективное выделение действительных корней многочлена // Журнал вычислительной и прикладной математики. – 2004. – Т. 162 (1). – С. 33-50.
5. *Кутищев Г.П.* Решение алгебраических уравнений произвольной степени: теория, методы, алгоритмы. – М.: Изд-во URRS, 2010. – 232 с.
6. *Вержбицкий В.М.* Численные методы математической физики: учеб. пособие. – М: Директ.-Медиа, 2013. – 212 с.
7. *Рутисхаузер Г.* Алгоритм частных и разностей. – М.: ИИЛ, 1960. – 93 с.
8. *Гузик В.Ф., Шмойлов В.И., Кириченко Г.А.* Непрерывные дроби и их применение в вычислительной математике // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. – № 1 (150). – С. 158-174.
9. *Шмойлов В.И., Коваленко В.Б.* Некоторые применения алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей // Вестник Южного Научного Центра РАН. – 2012. – Т. 8, № 4. – С. 3-13.
10. *Трубников Ю.В.* Расходящиеся степенные ряды и формулы приближенного аналитического нахождения решений алгебраических уравнений // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2018. – № 4 (101). – С. 5-17.
11. *Bruno A.D.* Universal Generalization of the Continued Fraction Algorithm // Чебышевский сборник. – 2015. – 16 (2). – С. 35-65.
12. *Федоров Ф.М., Абрамова М.Е.* О решении алгебраических уравнений бесконечной степени обобщенным методом Бернулли // Математические заметки СВФУ. – 2004. – № 2. – С. 1-9.
13. *Долгой В.Е., Шмойлов В.И.* Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями // Многопроцессорные вычислительные и управляющие системы: Матер. Международной научно-технической конференции. – 2009. – С. 164-167.
14. *Гладковский С.Н.* Анализ условно-периодических цепных дробей. Ч. 1. – Незлобная, 2009. – 138 с.
15. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби и r/φ-алгоритм. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. – 608 с.
16. *Долгой В.Е.* Цепные дроби и их применение в приближенных вычислениях // Наука и техника, общество и культура: проблемы конвергентного развития: Сб. материалов Молодежных научных чтений: в 2 частях. Южный федеральный университет. – 2018. – С. 179-184.
17. *Ильин В.А., Ким Г.Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 320 с.
18. *Лебедева А.В., Рябов В.М.* О численном решении систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленными матрицами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – № 4. – С. 619-625.

19. *Böttcher A.; Grudsky S.* Toeplitz Matrices, Asymptotic Linear Algebra and Functional Analysis. – Basel: Birkhäuser, 2012. – 112 p.
20. *Friedrich L. Bauer*. Origins and Foundations of Computing: In Cooperation with Heinz Nixdorf Museums Forum. – Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2010. – 142 p.
21. *Штеренлихт Д.В.* Гидравлика. – М.: Изд-во Колос-С, 2009. – 656 с.

REFERENCES

1. *Zelenova M.E.* O reshenii polinomial'nykh uravneniy v proizvolnykh poryadkakh [On the solution of polynomial equations in arbitrary orders], *Chebyshevskiy sbornik* [Chebyshev collection], 2015, No. 2 (54), pp. 117-121.
2. *Dixon J.D.* Exact Solution of Linear Equations Using P-Adic Expansions, *Numerische Mathematik*, 1982, Vol. 40, pp. 137-141.
3. *Cohen H.* A Course in Computational Algebraic Number Theory. New York: Springer, 1996, 545 p.
4. *Ruye F., Tsimmerman P.* Effektivnoye vydeleniye deystvitel'nykh korney mnogochlena [Efficient allocation of real roots of a polynomial], *Zhurnal vychislitel'noy i prikladnoy matematiki* [Journal of Computational and Applied Mathematics], 2004, Vol. 162 (1), pp. 33-50.
5. *Kutishchev G.P.* Resheniye algebraicheskikh uravneniy proizvol'noy stepeni: teoriya, metody, algoritmy [Solving algebraic equations of arbitrary degree: theory, methods, algorithms]. Moscow: Izd-vo URRS, 2010, 232 p.
6. *Verzhbitskiy V.M.* Chislennyye metody matematicheskoy fiziki: ucheb. posobiye [Numerical methods of mathematical physics: textbook]. Moscow: Direkt.-Media, 2013, 212 p.
7. *Rutiskhauzer G.* Algoritm chastnykh i raznostey [Algorithm of quotients and differences]. Moscow: IIL. 1960, 93 p.
8. *Guzik V.F.. Shmoylov V.I.. Kirichenko G.A.* Nepreryvnyye drobi i ikh primeneniye v vychislitel'noy matematike [Continued fractions and their application in computational mathematics], Izvestiya YuFU. Tekhnicheskiye nauki [Izvestiya SFedU. Engineering sciences], 2014, No. 1 (150), pp. 158-174.
9. *Shmoylov V.I., Kovalenko V.B.* Nekotoryye primeneniya algoritma summirovaniya raskhodyashchikhsya nepreryvnykh drobey [Some applications of the summation algorithm for divergent continued fractions], *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra RAN* [Bulletin of the Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2012, Vol. 8. No. 4, pp. 3-13.
10. *Trubnikov Yu.V.* Raskhodyashchiyesya stepennyye ryady i formuly priblizhennogo analiticheskogo nakhozhdeniya resheniy algebraicheskikh uravneniy [Divergent Power Series and Formulas for Approximate Analytical Finding of Solutions to Algebraic Equations], Vesn. *Vitseb. dzyarzh. un-ta*, 2018, No. 4 (101), pp. 5-17.
11. *Bruno A.D.* Universal Generalization of the Continued Fraction Algorithm, *Chebyshevskiy sbornik* [Chebyshev collection], 2015, 16 (2), pp. 35-65.
12. *Fedorov F.M., Abramova M.E.* O reshenii algebraicheskikh uravneniy beskonechnoy stepeni obobshchennym metodom Bernulli [On the solution of algebraic equations of infinite degree by the generalized Bernoulli method], *Matematicheskiye zametki SVFU* [Mathematical notes of NEFU], 2004, No.2, pp. 1-9.
13. *Dolgoy V.E.. Shmoylov V.I.* Resheniye algebraicheskikh uravneniy nepreryvnymi drobyami [Solving algebraic equations by continued fractions], *Mnogoprotsessornyye vychislitel'nyye i upravlyayushchiye sistemy. Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Multiprocessor computing and control systems. Proceedings of the International Scientific and Technical Conference], 2009, pp. 164-167.
14. *Gladkovskiy S.N.* Analiz uslovno-periodicheskikh tsepnykh drobey. ch. 1. [Analysis of conditionally periodic continued fractions. Part 1]. Nezlobnaya. 2009, 138 p.
15. *Shmoylov V.I.* Nepreryvnyye drobi i r/ϕ-algoritm [Continued fractions and the r/ϕ-algorithm]. Taganrog: Izd-vo TTI YuFU, 2012, 608 p.
16. *Dolgoy V.E.* Tsepnyye drobi i ikh primeneniye v priblizhennykh vychisleniyakh [Continued fractions and their application in approximate calculations], *Nauka i tekhnika. obshchestvo i kultura: problemy konvergentnogo razvitiya. Sbornik materialov Molodezhnykh nauchnykh chteniy: v 2 chastyakh. Yuzhnyy federalnyy universitet* [Science and technology, society and culture: problems of convergent development. Collection of materials for Youth Scientific Readings: in 2 parts. SFedU], 2018, pp. 179-184.
17. *Ilin V.A.. Kim G.D.* Lineynaya algebra i analiticheskaya geometriya [Linear Algebra and Analytic Geometry]. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 1998, 320 p.

18. *Lebedeva A.V., Ryabov V.M.* O chislennom reshenii sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy s plokho obuslovlennymi matritsami [On the numerical solution of systems of linear algebraic equations with ill-conditioned matrices], *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya* [Bulletin of St. Petersburg University. Maths. Mechanics. Astronomy], 2019, No. 4, pp. 619-625.
19. *Böttcher A.; Grudsky S.* Toeplitz Matrices, Asymptotic Linear Algebra and Functional Analysis. Basel: Birkhäuser, 2012, 112 p.
20. *Friedrich L. Bauer.* Origins and Foundations of Computing: In Cooperation with Heinz Nixdorf MuseumsForum. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2010, 142 p.
21. *Shterenliht D.V.* Gidravlika [Hydraulics]. Moscow: Izd-vo Kolos-S, 2009, 656 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор М.Ю. Медведев.

Долгой Вячеслав Евгеньевич – Южный федеральный университет; e-mail: vedolgoy@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: 89081841211; кафедра высшей математики; старший преподаватель.

Гамолина Ирина Эдуардовна – e-mail: iegamolina@sfedu.ru; тел. 89185190837; кафедра высшей математики; к.т.н.; доцент.

Dolgoy Vyacheslav Evgenievich – Southern Federal University, e-mail: vedolgoy@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +79081841211; the department of higher mathematics; senior lecturer.

Gamolina Irina Eduardovna – e-mail: iegamolina@sfedu.ru; phone: +79185190837; the department of higher mathematics; cand. of eng. sc.; associate professor.

УДК 004.822 DOI 10.18522/2311-3103-2022-5-37-47

П.Ю. Чудинов, Л.К. Бабенко, Ю.И. Рогозов

АНАЛИЗ ПРОБЛЕМ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ В СЕМАНТИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Анализируется структура, принципы и технологи, используемые при создании семантических сетей, методика представления знаний в семантической сети. Отдельное внимание уделяется анализу структуры запросов к данным, хранящихся в семантической сети. Целью анализа является определение структурных элементов, несущих в себе конфиденциальную, либо иную важную информацию для дальнейшего формирования методологии её защиты с учётом специфики семантической сети. В результате анализа типовых структур семантических сетей рассмотрены основополагающие структурные элементы и понятия, составляющие структуру анализируемого метода представления знаний. Определены используемые для её построения специализированные языки и структура информационного запроса к базе знаний, в которой были выявлены элементы, несущие конфиденциальную информацию и потенциально уязвимые к атакам злоумышленников. Выявлены проблемы в информационной безопасности семантических сетей, такие как: незащищённость от вредоносных запросов SPARQL, которая может быть использована для получения информации из семантической сети без соответствующих привилегий и доступов; уязвимость данных в передаваемом информационном запросе, характеризующаяся слабой ориентированностью существующих методов защиты на специфику семантических сетей; проблема оценки уровня доверия к получаемым данным семантической сети. Одним из подходов для решения этих проблем может являться создание распределённой системы оценивания доверия к узлам и данным в семантической сети, а также реализация механизмов защиты информации и информационных запросов. Полученные в результате анализа результаты о структуре передаваемых данных являются неотъемлемой частью процесса разработки средств защиты информации в семантических сетях.

Семантическая сеть; онтология; граф; RDF; OWL; SPARQL; представление знаний; информационный запрос.