УДК 004.942:519.254:519.876.5:621.396.96:629.7.018 DOI 10.18522/2311-3103-2022-6-106-116

И.Л. Щербов

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ БАЗИСНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ АРГУМЕНТОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ Λ-ОРТОГОНАЛЬНОЙ БАЗИСНОЙ ФУНКЦИИ

Цель исследований – определение области задания аргумента τ и интервалов его дискретизации $\Delta\tau_X,\Delta\tau_y,\Delta\tau_Z$ *при построении алгоритма адаптивного нелинейного оптимального сглаживания многопараметрических данных траекторных измерений, позволяющего совместно реализовать пространственную и временную избыточность получаемых данных. Исследования проводились путем построения Λ-ортогональной базисной функции с целью получения независимых оценок коэффициентов сглаживающего полинома. Показано, что решение задачи по определению максимально правдоподобной оценки вектора коэффициентов сглаживающего полинома целесообразно осуществлять методом последовательных приближений. При построении Λ-ортогональной базисной функции максимально правдоподобная оценка вектора коэффициентов сглаживающего полинома достигается в 2-3 итерации. Из результатов исследований, приведенных в работе, следует, что показатель точности* Q_m *как функция двух аргументов (*τ_0 *– наименьшее значение аргумента и Δτ – интервал дискретизации аргумента τ) в широком диапазоне значений этих аргументов изменяется слабо, но резко увеличивается при* $\Delta\tau \ll \tau_0$*. При этом величины значений аргументов не должны превосходить соответственно максимально и минимально возможных чисел, которые можно без потери точности записать в разрядную сетку применяемой ЭВМ. При равномерном шаге дискретизации аргумента τ, аргумент* τ_0 *целесообразно выбирать в средней части интервала, где* q_{min} *и* q_{max} *соответственно минимальные и максимальные числа, которые без потери точности можно записать в разрядную сетку ЭВМ. Приближение к краям интервала может при неблагоприятных условиях привести к возрастанию ошибок вычислений при определении вторичных параметров положения летательного аппарата из-за того, что основная матрица системы уравнений становится плохо обусловленной.*

Линейно независимая базисная функция двух аргументов; Λ-ортогональная базисная функция; область определения параметров; показатель точности.

I.L. Shcherbov

STUDY OF THE AREA OF DETERMINATION OF PARAMETERS OF THE BASIS FUNCTION OF TWO ARGUMENTS IN CONSTRUCTING THE Λ-ORTHOGONAL BASIS FUNCTION

The purpose of the research is to determine the area of setting the argument τ and its discretization intervals $\Delta\tau_X,\Delta\tau_y,\Delta\tau_Z$ *when constructing an algorithm for adaptive nonlinear optimal smoothing of multi-parameter data of trajectory measurements, which makes it possible to jointly implement the spatial and temporal redundancy of the data obtained. The research was carried out by constructing a Λ-orthogonal basis function in order to obtain independent estimates for the coefficients of the smoothing polynomial. It is shown that it is advisable to solve the problem of determining the maximum likelihood estimate of the coefficient vector of the smoothing polynomial by the method of successive approximations. When constructing a Λ-orthogonal basis function, the maximum likelihood estimate of the coefficient vector of the smoothing polynomial is achieved in 2-3 iterations. It follows from the research results presented in the paper that the accuracy index* Q_m *as a function of two arguments (*τ_0 *is the smallest value of the argument and Δτ is the discretization interval of the argument τ) in a wide range of values of these arguments changes slightly, but increases sharply at* $\Delta\tau \ll \tau_0$*. In this case, the values of these arguments should not exceed, respectively, the maximum and minimum possible numbers that can be written without loss of accuracy in the re grid of the computer used. With a uniform discretization step of the argument*

τ it is advisable to choose the argument τ_0 in the middle part of the interval, where q_{min} and q_{max} respectively, are the minimum and maximum numbers that can be written into the bit grid of a computer without loss of accuracy. In case of adverse conditions Approaching the edges of the interval can lead to an increase in calculation errors in determining the secondary parameters of the position of the aircraft due to the fact that the main matrix of the system of equations becomes ill-conditioned.

Linearly independent basis function of two arguments; Λ-orthogonal basis function; area of determination of parameters; accuracy index.

Введение. Измерения, проводимые в процессе лётных испытаний, предназначены для определения и анализа реального положения летательных аппаратов. По результатам измерений и последующей их обработки должно быть принято решение о степени соответствия реальных характеристик летательных аппаратов, заданным на них требованиям.

Как правило, оценка лётных характеристик летательных аппаратов осуществляется не только по результатам летных испытаний, но и по результатам математического моделирования различных этапов и траекторий полета, когда речь идет о возможностях летательных аппаратов, проверка которых в процессе летных испытаний может быть связана с риском потери летательного аппарата.

Основная часть. В статьях [1, 2] приводятся результаты исследования линейно-независимой базисной функции (ЛНБФ) двух аргументов:

$$\varphi(t,\tau)=\begin{Vmatrix}\varphi_{00}(t,\tau_x)\varphi_{01}(t,\tau_x)\varphi_{02}(t,\tau_x)\ldots\varphi_{m0}(t,\tau_x)\varphi_{m1}(t,\tau_x)\varphi_{m2}(t,\tau_x)\\ \varphi_{00}(t,\tau_y)\varphi_{01}(t,\tau_y)\varphi_{02}(t,\tau_y)\ldots\varphi_{m0}(t,\tau_y)\varphi_{m1}(t,\tau_y)\varphi_{m2}(t,\tau_y)\\ \varphi_{00}(t,\tau_z)\varphi_{01}(t,\tau_z)\varphi_{02}(t,\tau_z)\ldots\varphi_{m0}(t,\tau_z)\varphi_{m1}(t,\tau_z)\varphi_{m2}(t,\tau_z)\end{Vmatrix}, \tag{1}$$

где

$$\varphi(t,\tau)=(t-t_0)^0\tau_l^0(t-t_0)^0\tau_l^1(t-t_0)^0\tau_l^2\ldots(t-t_0)^m\tau_l^0(t-t_0)^m\tau_l^1(t-t_0)^m\tau_l^2;$$

τ_x, τ_y, τ_z – независимая переменная по координатам X, Y, Z.

С учетом (1) описание вектор-функции r(t) с помощью полинома, определяющего положение ЛА и его координатных составляющих, имеет вид:

$$r(t,\tau,A)=\varphi(t,\tau)A=\begin{Vmatrix}\varphi_{00}(t,\tau_x)\varphi_{01}(t,\tau_x)\varphi_{02}(t,\tau_x)\ldots\varphi_{m0}(t,\tau_x)\varphi_{m1}(t,\tau_x)\varphi_{m2}(t,\tau_x)\\ \varphi_{00}(t,\tau_y)\varphi_{01}(t,\tau_y)\varphi_{02}(t,\tau_y)\ldots\varphi_{m0}(t,\tau_y)\varphi_{m1}(t,\tau_y)\varphi_{m2}(t,\tau_y)\\ \varphi_{00}(t,\tau_z)\varphi_{01}(t,\tau_z)\varphi_{02}(t,\tau_z)\ldots\varphi_{m0}(t,\tau_z)\varphi_{m1}(t,\tau_z)\varphi_{m2}(t,\tau_z)\end{Vmatrix}\cdot|A|=$$

$$=\begin{Vmatrix}\sum\limits_{k=0}^{m_x}\sum\limits_{l=0}^{2}a_{kl}\varphi_{kl}(t,\tau_x)\\ \sum\limits_{k=0}^{m_y}\sum\limits_{l=0}^{2}a_{kl}\varphi_{kl}(t,\tau_y)\\ \sum\limits_{k=0}^{m_z}\sum\limits_{l=0}^{2}a_{kl}\varphi_{kl}(t,\tau_z)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\varphi(t,\tau_x)A\\ \varphi(t,\tau_y)A\\ \varphi(t,\tau_z)A\end{Vmatrix}, \tag{2}$$

где $A^T=\begin{Vmatrix}a_{00}a_{01}a_{02}\ldots a_{k0}a_{k1}a_{k2}\ldots a_{m0}a_{m1}a_{m2}\end{Vmatrix}$,

$a_k l$ – коэффициенты сглаживающего полинома;

l = 0, 1, 2;

m – степень сглаживающего полинома.

В представлении (2) координатные составляющие $x(t,\tau_x,A)$, $y(t,\tau_y,A)$, $z(t,\tau_z,A)$ будут формироваться с учетом всех составляющих вектора А.

Случайный характер траектории летательного аппарата вносит особенности по оптимальной оценки вектора А – коэффициентов сглаживающего полинома. При этом оптимальная оценка составляющих вектора коэффициентов сглаживающего полинома увязана с определением их состава.

Для этого необходимо получить статистически независимые оценки коэффициентов сглаживающего полинома. Так как случайный характер траекторий летательного аппарата трудно совместим с их высокой априорной определенностью, то прикладные методы информационной обработки данных траекторных измерений необходимо строить на основе статистических методов, которые не связанных с использованием априорной информации о распределении составляющих вектора А – коэффициентов сглаживающего полинома.

Так как векторы ξ-измерений первичных радиолокационных, кинотеодолитных данных измерений и коэффициентов сглаживающего полинома являются многомерными случайными величинами, то взаимное соответствие между ними будет определяться совместной плотностью вероятности [3].

Решение задачи по определению максимально правдоподобной оценки (МПО) вектора $\hat{A}$ – оценки вектора коэффициентов сглаживающего полинома целесообразно искать методом последовательных приближений, из-за нелинейной зависимости между вектором измерений первичных параметров случайной траектории от вектора коэффициентов сглаживающего полинома. Для совместной реализации пространственной и временной избыточности данных измерений, в работах [3–6] получен универсальный итеративный алгоритм:

$$\widehat{A}_{\nu+1} = \widehat{A}_\nu + \Delta\widehat{A}_\nu = \widehat{A}_\nu + (J_\nu^T \Lambda J_\nu)^{-1} J_\nu^T \Lambda\{\xi - \xi[r(t, A_\nu)]\}, \tag{3}$$

где J – матрица Якоби частных производных от измеряемых по вычисляемым параметрам; ν – номер ν-го приближения; $J_\nu^T \Lambda J_\nu$ – основная матрица системы уравнений на ν-ом шаге приближения; Λ – весовая матрица ошибок измерений.

Из выражения (3) видно, что СО достигается через ряд последовательных приближений.

Структура (1) может быть представлена таким образом:

$$\varphi(t,\tau) = \left\| \begin{array}{ccccccccccc}
\tau_x^0 t_1^0 & \tau_x^1 t_1^0 & \tau_x^2 t_1^0 & \dots & \tau_x^0 t_1^k & \tau_x^1 t_1^k & \tau_x^2 t_1^k & \dots & \tau_x^0 t_1^m & \tau_x^1 t_1^m & \tau_x^2 t_1^m \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\tau_x^0 t_i^0 & \tau_x^1 t_i^0 & \tau_x^2 t_i^0 & \dots & \tau_x^0 t_i^k & \tau_x^1 t_i^k & \tau_x^2 t_i^k & \dots & \tau_x^0 t_i^m & \tau_x^1 t_i^m & \tau_x^2 t_i^m \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\tau_x^0 t_n^0 & \tau_x^1 t_n^0 & \tau_x^2 t_n^0 & \dots & \tau_x^0 t_n^k & \tau_x^1 t_n^k & \tau_x^2 t_n^k & \dots & \tau_x^0 t_n^m & \tau_x^1 t_n^m & \tau_x^2 t_n^m \\
\tau_y^0 t_1^0 & \tau_y^1 t_1^0 & \tau_y^2 t_1^0 & \dots & \tau_y^0 t_1^k & \tau_y^1 t_1^k & \tau_y^2 t_1^k & \dots & \tau_y^0 t_1^m & \tau_y^1 t_1^m & \tau_y^2 t_1^m \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\tau_y^0 t_i^0 & \tau_y^1 t_i^0 & \tau_y^2 t_i^0 & \dots & \tau_y^0 t_i^k & \tau_y^1 t_i^k & \tau_y^2 t_i^k & \dots & \tau_y^0 t_i^m & \tau_y^1 t_i^m & \tau_y^2 t_i^m \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\tau_y^0 t_n^0 & \tau_y^1 t_n^0 & \tau_y^2 t_n^0 & \dots & \tau_y^0 t_n^k & \tau_y^1 t_n^k & \tau_y^2 t_n^k & \dots & \tau_y^0 t_n^m & \tau_y^1 t_n^m & \tau_y^2 t_n^m \\
\tau_z^0 t_1^0 & \tau_z^1 t_1^0 & \tau_z^2 t_1^0 & \dots & \tau_z^0 t_1^k & \tau_z^1 t_1^k & \tau_z^2 t_1^k & \dots & \tau_z^0 t_1^m & \tau_z^1 t_1^m & \tau_z^2 t_1^m \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\tau_z^0 t_i^0 & \tau_z^1 t_i^0 & \tau_z^2 t_i^0 & \dots & \tau_z^0 t_i^k & \tau_z^1 t_i^k & \tau_z^2 t_i^k & \dots & \tau_z^0 t_i^m & \tau_z^1 t_i^m & \tau_z^2 t_i^m \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\tau_z^0 t_n^0 & \tau_z^1 t_n^0 & \tau_z^2 t_n^0 & \dots & \tau_z^0 t_n^k & \tau_z^1 t_n^k & \tau_z^2 t_n^k & \dots & \tau_z^0 t_n^m & \tau_z^1 t_n^m & \tau_z^2 t_n^m
\end{array} \right\|, \tag{4}$$

где $t_1,...,t_i,..t_n$ – моменты времени на интервале сглаживания;

n – число точек на интервале сглаживания;

τ_x, τ_y, τ_z – независимая переменная по координатам X, Y, Z, χ=0, 1, 2 – индекс независимой переменной τ по строке;

k=0, …, m – степень сглаживающего полинома.

Известно [7–10], что для оценки вектора положения объекта в пространстве необходимо, чтобы определитель основной матрицы $\varphi^T\varphi$ системы уравнений не был равен нулю. Для этого необходимо, чтобы система базисных функций (4) являлась линейно независимой.

Из теории матричных вычислений [11–14] известно, что система векторов является линейно зависимой, если один из векторов линейно выражается через остальные векторы системы.

Из матрицы (4) видно, что она состоит из $3(m_{\max}+1)$ столбцов и $3\cdot n$ строк (где $m_{\max}$ – максимально возможная степень сглаживающего полинома, а n – количество точек на интервале сглаживания), при этом система базисных функций будет линейно независимой, когда $\tau_x \neq \tau_y \neq \tau_z$. Определим и исследуем область задания аргумента τ, интервал его дискретизации $\Delta\tau_x, \Delta\tau_y, \Delta\tau_z$.

В работах [3, 4] рассмотрен способ построения Λ-ортогональной базисной функции (Λ-ОБФ) вида:

$$P_{00}(t,\tau)\ P_{01}(t,\tau)\ P_{02}(t,\tau)...P_{kl}(t,\tau)...P_{m0}(t,\tau)\ P_{m1}(t,\tau)\ P_{m2}(t,\tau) \tag{5}$$

с целью определения области задания интервала дискретизации аргумента τ. Общий элемент $P_{kl}(t,\tau)$ характерен тем, что недиагональные элементы основной матрицы системы уравнений равны нулю.

В начале процесса построения Λ-ОБФ примем следующие условия $P_{00}(t,\tau) \equiv \varphi_{00}(t,\tau)$; $J_{00} \equiv \Phi_{00}$.

В дальнейшем считаем:

$$P_{01}(t,\tau) = \alpha_{00,01}P_{00}(t,\tau) + \varphi_{01}(t,\tau),$$

В данной формуле вспомогательный коэффициент определяется исходя из следующих условий:

$$J_{kl}^T \Lambda J_{kl} = 0, \tag{6}$$

где J – матрица Якоби, элементы которой $J_{kl} = FP_{kl}$; F – элемент матрицы проекций градиентов.

Для этого на базе ранее вычисленных матриц J_{00} и Φ_{01} вычислим вектор-столбец J_{01} по формуле:

$$J_{01} = \alpha_{00,01}J_{00} + \Phi_{01}.$$

Транспонируем матрицу J_{01} и умножим её справа на ΛJ_{00}, а полученный результат приравняем к нулю:

$$J_{01}^T \Lambda J_{00} = \alpha_{00,01}J_{00}^T \Lambda J_{00} + \Phi_{01}^T \Lambda J_{00} = 0. \tag{7}$$

Из выражения (7) найдем значение неизвестного вспомогательного коэффициента $\alpha_{00,01}$:

$$\alpha_{00,01} = -\frac{\Phi_{01}^T \Lambda J_{00}}{J_{00}^T \Lambda J_{00}}.$$

Аналогично получим:

$$P_{02}(t,\tau) = \alpha_{00,02} P_{00}(t,\tau) + \alpha_{01,02} P_{01}(t,\tau) + \varphi_{02}(t,\tau)$$

и определим вспомогательные коэффициенты $\alpha_{00,02}$ и $\alpha_{01,02}$.

Для этого на базе известных матриц J_{00}, J_{01} и Φ_{02} вычислим вектор-столбец:

$$J_{02} = \alpha_{00,02} J_{00} + \alpha_{01,02} J_{01} + \Phi_{02}. \quad (9)$$

Транспонируем матрицу вектор-столбец J_{02}, умножим её справа на ΛJ_{00} и, приравняв полученный результат к нулю и согласно условия (6) получим:

$$J_{02}^T \Lambda J_{00} = \alpha_{00,02} J_{00}^T \Lambda J_{00} + \alpha_{01,02} J_{01}^T \Lambda J_{00} + \Phi_{02}^T \Lambda J_{00} = 0. \quad (9)$$

Аналогично умножив J_{02}^T на ΛJ_{01} получим:

$$J_{02}^T \Lambda J_{01} = \alpha_{00,02} J_{00}^T \Lambda J_{01} + \alpha_{01,02} J_{01}^T \Lambda J_{01} + \Phi_{02}^T \Lambda J_{01} = 0, \quad (10)$$

Согласно условия (6), выражения (9) и (10) упрощаются:

$$\alpha_{00,02} J_{00}^T \Lambda J_{00} + \Phi_{02}^T \Lambda J_{00} = 0,$$

$$\alpha_{01,02} J_{01}^T \Lambda J_{01} + \Phi_{02}^T \Lambda J_{01} = 0. \quad (11)$$

Вычисляем коэффициенты из выражений (11)

$$\alpha_{00,02} = -\frac{\Phi_{02}^T \Lambda J_{00}}{J_{00}^T \Lambda J_{00}}; \quad \alpha_{01,02} = -\frac{\Phi_{02}^T \Lambda J_{01}}{J_{01}^T \Lambda J_{01}}.$$

Процесс повторяется до получения $P_{m2}(t,\tau)$.

Если определена функция $P_{k(l-1)}(t,\tau)$ системы (5), то следующая функция $P_{kl}(t,\tau)$ будет найдена из предлагаемого нами рекуррентного соотношения:

$$P_{kl}(t,\tau) = \sum_{\chi=0}^{k-1} \sum_{\lambda=0}^{2} \alpha_{\chi\lambda,kl} P_{\chi\lambda}(t,\tau) + \sum_{\chi=k}^{k} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \alpha_{\chi\lambda,kl} P_{\chi\lambda}(t,\tau) + \varphi_{kl}(t,\tau),$$

где

$$\alpha_{\chi\lambda,kl} = -\frac{\Phi_{kl}^T \Lambda J_{\chi\lambda}}{J_{\chi\lambda}^T \Lambda J_{\chi\lambda}}. \quad (12)$$

На базе ранее работ [15–17] можно показать, что между системами функций $P(t,\tau)$ и $\varphi(t,\tau)$ существует линейная связь:

$$P(t,\tau) = \varphi(t,\tau) U,$$

где

$$U = \begin{Vmatrix} 1 & U_{00,01} & U_{00,02} & \cdots & U_{00,kl} & \cdots & U_{00,m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & U_{\chi\lambda,kl} & \cdots & U_{\chi\lambda,m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & \ldots\ 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

верхняя треугольная матрица, диагональные элементы которой равны единице, а элементы, расположенные выше главной диагонали, вычисляются по формуле:

$$U_{\chi\lambda,kl} = \sum_{p=k}^{k} \sum_{q=0}^{l-1} U_{\chi\lambda,pq}\alpha_{pq,kl} + \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{2} U_{\chi\lambda,pq}\alpha_{pq,kl} \tag{13}$$

через вспомогательные коэффициенты $\alpha_{pq,kl}$.

На основе ранее выполненных работ [12, 13] можно показать, что между (12) и (13) существует следующая связь:

$$U = \begin{Vmatrix} 1 & U_{00,01} & U_{00,02} & \cdots & U_{00,kl} & \cdots & U_{00,m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & U_{\chi\lambda,kl} & \cdots & U_{\chi\lambda,m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & \ldots\ 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & -\alpha_{00,01} & -\alpha_{00,02} & \cdots & -\alpha_{00,kl} & \cdots & -\alpha_{00,m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & -\alpha_{\chi\lambda,kl} & \cdots & -\alpha_{\chi\lambda,m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & \ldots\ 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}^{-1}.$$

Можно показать, что между векторами $\hat{C}$ и $\hat{A}$ существует связь $\hat{A} = U^{-1}\hat{C}$, которая вытекает из тождественности следующих преобразований

$$\hat{r}(t, \hat{C}) = \varphi\hat{C} = \varphi I\hat{C} = \varphi UU^{-1}\hat{C} = P\hat{A},$$

где I – единичная матрица; $\hat{r}$ – оценка вектора положения объекта в пространстве.

При решении задачи нелинейного сглаживания построение Λ-ортогональной базисной функции необходимо производить на каждом шаге приближения к максимально правдоподобной оценке (МПО). Тогда на различных этапах последовательного приближения выражение (8) будет иметь вид:

$$P_1 = \varphi U_1,$$
$$P_2 = P_1 U_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_\nu = P_{\nu-1} U_\nu,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

где ν – номер последовательного приближения к МПО положения объекта в пространстве.

Из приведенных выше рассуждений следует общее выражение, позволяющее описывать линейную связь между P и φ в виде:

$$P_\nu = \varphi U_1 U_2 .. U_\nu = \varphi U_\Pi,$$

где $U_{\Pi} = U_1 U_2 .. U_\nu$ – матрица, полученная в результате перемножения U матриц до ν-го последовательного приближения включительно.

Для определения точности получения максимально правдоподобной оценки вектора оценки коэффициентов сглаживающего полинома, к которой приводит предложенный в работе [16] итеративный алгоритм через ряд последовательных приближений, предположим, что очередное вычисленное значение оценки вектора коэффициентов сглаживающего полинома совпало с истинным значением вектора ($\hat{A}_\nu = A$), и ошибки измерений относительно невелики. В практике траекторных измерений данное допущение всегда выполняется.

Данные допущения позволяют определить отклонение вектора коэффициентов сглаживающего полинома на последнем шаге приближения формулой:

$$\Delta\hat{A}_\nu = \hat{A}_\nu - A = (J_\nu^T \Lambda J_\nu)^{-1} J_\nu^T \Lambda \Delta\xi_\nu .$$

Так как систематические ошибки измерений нами исключены при обработке путем введения поправок, математическое ожидание ошибок будет иметь вид:

$$M(\Delta\hat{A}_\nu) = (J_\nu^T \Lambda J_\nu)^{-1} J_\nu^T \Lambda M(\Delta\xi_\nu),$$

а корреляционная матрица ошибок оценок коэффициентов сглаживающего полинома

$$K_{\hat{A}} = M\{[\Delta\hat{A}_\nu - M(\Delta A_\nu)][\Delta\hat{A}_\nu - M(\Delta\hat{A}_\nu)]^T\} = (J_\nu^T \Lambda J_\nu)^{-1}.$$

Из выше приведенных рассуждений следует, что корреляционная матрица ошибок оценок коэффициентов сглаживающего полинома может быть получена обращением основной матрицы системы нормальных уравнений, вычисленной на последнем шаге приближения этих параметров [4, 18].

Для сохранения ранее введенных обозначений J для матрицы Якоби и $\hat{A}$ для вектора оценок коэффициентов сглаживающего полинома, полученных при независимом вычислении составляющих вектора оценок коэффициентов сглаживающего полинома при использовании ранее построенной Λ-ОБФ, введем соответственно новые обозначения Φ и $\hat{C}$ для матрицы Якоби и МПО вектора коэффициентов сглаживающего полинома, получаемых при прямом решении системы уравнений с применением системы ЛНБФ [4].

Тогда вектор-поправка в новых обозначениях будет иметь вид

$$\Delta C_\nu = (\Phi_\nu^T \Lambda \Phi_\nu)^{-1} \Phi_\nu^T \Lambda \Delta\xi_\nu$$

и её можно рассматривать как результат решения матричной системы уравнений вида:

$$\Phi_\nu^T \Lambda \Phi_\nu \Delta C_\nu = \Phi_\nu^T \Lambda \Delta\xi_\nu ,$$

где Φ_ν – матрица Якоби; Λ – весовая матрица; $\Delta\xi_\nu$ – отклонение вектора измерений от ν-го приближения измеряемого вектора; ΔC_ν – вектор-поправка коэффициентов полинома на ν-м шаге приближения; $\Phi_\nu^T \Lambda \Phi_\nu$ – основная матрица системы уравнений на ν-м шаге приближения.

Так как между вектором данных измерений ξ и вектором вычисляемых параметров существует нелинейная зависимость, целесообразно искать Φ как матрицу последовательного преобразования [3]:

$$\Phi = F\varphi,$$

где F – матрица пространственного преобразования (матрица проекций градиентов); φ – матрица временного преобразования.

При точном вычислении любым из методов недиагональные элементы равны нулю. На практике они отличаются от нуля из-за накопления ошибок вычислений, зависящих от способа построения ортогональной базисной функции, а это приводит к небольшой расстройке Λ-ортогональности.

Приведем результаты исследования способа построения Λ-ОБФ по показателю точности $Q_{т.}$

Исследования производилось на различных интервалах сглаживания (15 и 25 точек) при различных степенях сглаживающего полинома (от 1 до 6) при удвоенной точности вычислений и обычной точности вычислений (для 25 точек на интервале сглаживания и 6-й степени сглаживающего полинома).

При обычной точности вычислений показатель точности $Q_т$ приблизительно в три раза хуже, чем в аналогичных условиях при удвоенной точности вычислений, время затраченное на Λ-ортогонализацию системы базисной функции при выполнении одной итерации, одинаково, а объем занимаемой памяти на 1/3 меньше (табл. 1).

Таблица 1

Показатель точности для структуры линейно независимых базисных функций двух переменных

Точек на интервале	Степень m_{max}	Показатель точности для структуры ЛНБФ двух переменных	Точность вычисления на ЭВМ
15	6	$9{,}31\cdot10^{-14}$	Удвоенная
15	5	$2{,}55\cdot10^{-14}$	Удвоенная
15	4	$1{,}11\cdot10^{-14}$	Удвоенная
15	3	$6{,}25\cdot10^{-15}$	Удвоенная
15	2	$5{,}69\cdot10^{-15}$	Удвоенная
15	1	$4{,}49\cdot10^{-15}$	Удвоенная
25	6	$1{,}08\cdot10^{-13}$	Удвоенная
25	5	$5{,}34\cdot10^{-14}$	Удвоенная
25	4	$2{,}13\cdot10^{-14}$	Удвоенная
25	3	$8{,}94\cdot10^{-15}$	Удвоенная
25	2	$9{,}35\cdot10^{-15}$	Удвоенная
25	1	$7{,}16\cdot10^{-15}$	Удвоенная
25	6	$4{,}77\cdot10^{-4}$	Обычная

Метод диагонализации, улучшенный Якоби и переработанный Нейманом, позволяет вычислить собственные значения и собственные вектора действительной симметричной матрицы. В процессе вычислений заданная симметричная матрица не сохраняется, вычисленные собственные значения располагаются по главной диагонали заданной симметричной матрицы в убывающем порядке, а на недиагональных элементах располагаются промежуточные результаты вычислений. Вычисленные собственные вектора запоминаются по столбцам в том же порядке, что и собственные значения [12].

В связи с этим, непосредственно использовать результаты вычислений на ЭВМ, полученные для оценки точности вычислений по величине недиагональных элементов корреляционной матрицы ошибок оценок коэффициентов сглаживающего полинома, не представляется возможным [19].

Из работы [20] известно:

$$K_{\hat{A}} = \Gamma^{-1} G^{\mathrm{T}} G \Gamma G^{\mathrm{T}} G \Gamma^{-1} = \Gamma^{-1} \quad , \tag{14}$$

где Г – диагональная матрица собственных значений основной матрицы системы $\Phi^T \Lambda \Phi$, построенной с использованием структуры ЛНБФ [1];

G – матрица собственных векторов основной матрицы системы уравнений $\Phi^T \Lambda \Phi$.

Однако в чистом виде матрица собственных значений не определяется. Воспользуемся для вычисления $K_{\hat{A}}$ развернутой частью выражения (14). Это позволило учесть почти все ошибки вычислений для структуры ЛНБФ [3].

При построении Λ-ОБФ максимально правдоподобная оценка вектора коэффициентов сглаживающего полинома достигается в 2-3 итерации.

Заключение. Экспериментальное исследование структуры ЛНБФ [3] на ЭВМ при нахождении области определения аргумента τ_0 и интервалов дискретизации $\Delta\tau_X, \Delta\tau_y, \Delta\tau_Z$ полностью подтвердили теоретические выводы. Детально структура ЛНБФ исследовалась в работах [15,–17, 21, 22].

Из результатов исследований, приведенных в этих работах, следует, что показатель точности Q_τ как функция двух аргументов (τ_0 – наименьшее значение аргумента и Δτ – интервал дискретизации аргумента τ) в широком диапазоне значений этих аргументов изменяется слабо, но резко увеличивается при $\Delta\tau \ll \tau_0$.

При этом величины $(\tau_z^2 t_n^m)^2$ и $(\tau_x^2 t_1^0)^2$ не должны превосходить соответственно максимально и минимально возможных чисел, которые можно без потери точности записать в разрядную сетку применяемой ЭВМ. При равномерном шаге дискретизации аргумента τ $\tau_x = \tau_0$, $\tau_y = 2\tau_0$, $\tau_z = 3\tau_0$ аргумент τ_0 целесообразно выбирать в средней части интервала $(\sqrt[4]{q_{min}}, \frac{\sqrt[4]{q_{max} t^{-2m}}}{9})$ (где q_{min} и q_{max} соответственно минимальные и максимальные числа, которые без потери точности можно записать в разрядную сетку ЭВМ). Приближение к краям интервала может при неблагоприятных условиях привести к возрастанию ошибок вычислений при определении вторичных параметров положения летательного аппарата из-за того, что основная матрица системы уравнений становится плохо обусловленной.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мильштейн А.В., Паслен В.В*. Метод нелинейного сглаживания в обработке данных траекторных измерений // Сб. научных трудов. Вып. 28. – Донецк: Донецкий институт железнождорожного транспорта, 2011. – С. 93-101.
2. *Мильштейн А.В., Мотылев К.И., Паслен В.В.* Исследование структур базисных функций // Сб. научных трудов. Вып. 29. – Донецк: Донецкий институт железнождорожного транспорта, 2012. – С. 23-30.
3. *Огоднийчук Н.Д.* Обработка траекторной информации. Ч. 1. – К.: КВВАИУ, 1981. – 141 с.
4. *Огоднийчук Н.Д.* О прикладных методах анализа траекторной информации // Сб. материалов НТК, посвященной 25-летию училища. Ч. 1. – К.: КВВАИУ, 1977. – С. 65-84.
5. *Щербов И.Л.* Исследование алгоритма адаптивного нелинейного оптимального сглаживания многопараметрических данных измерений // Информатика и кибернетика. – 2020. – № 4 (22). – С. 5-12.
6. *Щербов И.Л*., Паслен В.В., Мотылев К.И., Михайлов М.В. Методы обработки данных измерений, которые владеют пространственной и временной избыточностью // Системные технологии: Региональный межвузовский сборник научных работ. Вып. 5 (46). – Днепропетровск, 2006. – С. 95-100.
7. *Жданюк Б.Ф.* Основы статистической обработки траекторной информации. – М.: Сов. радио, 1978. – 384 с.

8. *Огоднийчук Н.Д.* Обработка траекторной информации. Ч. II. – К.: КВВАИУ, 1986. – 224 с.
9. *Светозаров В.В.* Основы статистической обработки результатов измерений. – М.: МИФИ, 2005. – 54 с.
10. *Савчук В.П.* Обработка результатов измерений. – Одесса: ОНПУ, 2002. – 54 с.
11. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. – М.: Научный Мир, 2002. – 155 с.
12. *Грантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
13. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1962. – 280 с.
14. *Волков Е.А*. Численные методы. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 248 с.
15. *Щербов И.Л., Паслен В.В., Михайлов М.В., Мотылев К.И., Лебеденко Д.М., Антикуз А.Г.* О построении ортогональных базисных функций // Туполевские чтения: Международная молодежная научная конференция, посвященная 1000-летию города Казани: Матер. конференции. Т. II. – Казань: Казан. гос. техн. ун-та, 2005. – С. 139-140.
16. *Щербов И.Л., Паслен В.В.* Обработка данных траекторного контроля с использованием ортогональных базисных функций // Вестник Академии гражданской защиты. – 2021. – Вып. 1 (25).– С. 48-53.
17. *Щербов И.Л.* Информационная технология обработки данных траекторного контроля // Вестник Донецкого национального университета. Сер. Г: Технические науки. – 2021. – № 1. – С. 71-77.
18. *Огороднийчук Н.Д*. Оценка параметров движения и точность их определения по данным коррелированных траекторных измерений. – К.: КВВАИУ, 1968. – 216 с.
19. *Баклицкий, В.К., Юрьев А.Н.* Корреляционно-экстремальные методы навигации. – М.: Радио и связь, 1982. – 256 с.
20. *Дубровский С.А.* Прикладной многомерный статистический анализ. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 216 с.
21. *Щербов И.Л., Паслен В.В., Фесенко Д.В., Михайлов М.В.* Причины возникновения сбоев и методы их устранения // Международная молодежная научно-практическая конференция «Человек и космос». – Днепропетровск: НЦАОМУ, 2006. – С. 120.
22. *Огоднийчук Н.Д., Паслен В.В., Велигдан С.В*. Исследования на ЭВМ свойств систем ЛНБФ и Λ-ОБФ как функции двух аргументов // Радиоэлектронное оборудование летательных аппаратов. Вып. 3. – К.: КВВАИУ, 1989. – С. 90-93.

REFERENCES

1. *Mil'shteyn A.V., Paslen V.V.* Metod nelineynogo sglazhivaniya v obrabotke dannykh traektornykh izmereniy [Method of non-linear smoothing in data processing of trajectory measurements], *Sb. nauchnykh trudov* [Collection of scientific papers]. Issue 28. Donetsk: Donetskiy institut zheleznozhdorozhnogo transporta, 2011, pp. 93-101.
2. *Mil'shteyn A.V., Motylev K.I., Paslen V.V.* Issledovanie struktur bazisnykh funktsiy [Investigation of the structures of basic functions], *Sb. nauchnykh trudov* [Collection of scientific papers]. Issue 29. Donetsk: Donetskiy institut zheleznozhdorozhnogo transporta, 2012, pp. 23-30.
3. *Ogodniychuk N.D.* Obrabotka traektornoy informatsii [Processing of trajectory information]. Part 1. Kiev: KVVAIU, 1981, 141 p.
4. *Ogodniychuk N.D.* O prikladnykh metodakh analiza traektornoy informatsii [On applied methods for analyzing trajectory information], *Sb. materialov NTK, posvyashchennoy 25-letiyu uchilishcha* [Collection of materials of the Scientific and Technical Committee dedicated to the 25th anniversary of the school]. Part 1. Kiev: KVVAIU, 1977. – S. 65-84.
5. *Shcherbov I.L.* Issledovanie algoritma adaptivnogo nelineynogo optimal'nogo sglazhivaniya mnogoparametricheskikh dannykh izmereniy [Study of the adaptive nonlinear optimal smoothing algorithm for multi-parameter measurement data], *Informatika i kibernetika* [Informatics and cybernetics], 2020, No. 4 (22), pp. 5-12.
6. *Shcherbov I.L., Paslen V.V., Motylev K.I., Mikhaylov M.V.* Metody obrabotki dannykh izmereniy, kotorye vladeyut prostranstvennoy i vremennoy izbytochnost'yu [Measurement data processing methods that have spatial and temporal redundancy], *Sistemnye tekhnologii: Regional'nyy mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh rabot* [System Technologies. Regional interuniversity collection of scientific papers]. Issue 5 (46). Dnepropetrovsk, 2006, pp. 95-100.
7. *Zhdanyuk B.F.* Osnovy statisticheskoy obrabotki traektornoy informatsii [Fundamentals of statistical processing of trajectory measurements]. Moscow: Sov. radio, 1978, 384 p.

8. *Ogodniychuk N.D.* Obrabotka traektornoy informatsii [Processing of trajectory information]. Part II. Kiev: KVVAIU, 1986, 224 p.
9. *Svetozarov V.V.* Osnovy statisticheskoy obrabotki rezul'tatov izmereniy [Fundamentals of statistical processing of measurement results]. Moscow: MIFI, 2005, 54 p.
10. *Savchuk V.P.* Obrabotka rezul'tatov izmereniy [Processing of measurement results]. Odessa: ONPU, 2002, 54 p.
11. *Algazin S.D.* Chislennye algoritmy bez nasyshcheniya v klassicheskikh zadachakh matematicheskoy fiziki [Unsaturated numerical algorithms in classical problems of mathematical physics]. Moscow: Nauchnyy Mir, 2002, 155 p.
12. Grantmakher F.R. Teoriya matrits [Matrix Theory]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 560 p.
13. *Lankaster P.* Teoriya matrits [Matrix Theory]. Moscow: Nauka. Glav. red. fiz.-mat. lit., 1962, 280 p.
14. *Volkov E.A.* Chislennye metody [Numerical methods]. Moscow: Nauka. Glav. red. fiz.-mat. lit., 1987, 248 p.
15. *Shcherbov I.L., Paslen V.V., Mikhaylov M.V., Motylev K.I., Lebedenko D.M., Antikuz A.G.* O postroenii ortogonal'nykh bazisnykh funktsiy [About the construction of orthogonal basis functions], *Tupolevskie chteniya: Mezhdunarodnaya molodezhnaya nauchnaya konferentsiya, posvyashchennaya 1000-letiyu goroda Kazani: Mater. Konferentsii* [Tupolev readings: International youth scientific conference dedicated to the 1000th anniversary of the city of Kazan. Conference materials]. Vol. II. Kazan': Kazan. gos. tekhn. un-ta, 2005, pp. 139-140.
16. *Shcherbov I.L., Paslen V.V.* Obrabotka dannykh traektornogo kontrolya s ispol'zovaniem ortogonal'nykh bazisnykh funktsiy [Trajectory control data processing using orthogonal basis functions], *Vestnik Akademii grazhdanskoy zashchity* [Vestnik of the Academy of Civil Protection], 2021, Issue 1 (25), pp. 48-53.
17. *Shcherbov I.L.* Informatsionnaya tekhnologiya obrabotki dannykh traektornogo kontrolya [Information technology of mathematical modeling of data processing of trajectory control], *Vestnik Donetskogo natsional'nogo universiteta. Ser. G: Tekhnicheskie nauki* [Vestnik of the Donetsk National University. Series G: Technical sciences], 2021, No. 1, pp. 71-77.
18. *Ogorodniychuk N.D.* Otsenka parametrov dvizheniya i tochnost' ikh opredeleniya po dannym korrelirovannykh traektornykh izmereniy [Evaluation of motion parameters and the accuracy of their determination according to data of correlated trajectory measurements]. Kiev: KVVAIU, 1968, 216 p.
19. *Baklitskiy, V.K., Yur'ev A.N.* Korrelyatsionno-ekstremal'nye metody navigatsii [Correlation-extremal methods of navigation]. Moscow: Radio i svyaz', 1982, 256 p.
20. *Dubrovskiy S.A.* Prikladnoy mnogomernyy statisticheskiy analiz [Applied multivariate statistical analysis]. Moscow: Finansy i statistika, 1982, 216 p.
21. *Shcherbov I.L., Paslen V.V., Fesenko D.V., Mikhaylov M.V.* Prichiny vozniknoveniya sboev i metody ikh ustraneniya [Causes of failures and methods of their elimination], *Mezhdunarodnaya molodezhnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya «Chelovek i kosmos»* [International Youth Scientific and Practical Conference "Man and Space"]. Dnepropetrovsk: NTSAOMU, 2006, pp. 120.
22. *Ogodniychuk N.D., Paslen V.V., Veligdan S.V.* Issledovaniya na EVM svoystv sistem LNBF i Λ-OBF kak funktsii dvukh argumentov [Computer studies of the properties of the LNBF and Λ-OBF systems as functions of two arguments], *Radioelektronnoe oborudovanie leta-tel'nykh apparatov* [Radio-electronic equipment of aircraft]. Issue 3. Kiev: KVVAIU, 1989, pp. 90-93.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.В. Боженюк.

Щербов Игорь Леонидович – Донецкий национальный технический университет; e-mail: scherbov@yandex.ru; г. Донецк, ДНР; проректор.

Shcherbov Igor Leonidovich – Donetsk National Technical University; e-mail: scherbov@yandex.ru; Donetsk, DPR; vice rector.