

Раздел II. Анализ данных и моделирование

УДК 517.91: 519.6

DOI 10.18522/2311-3103-2023-4-126-137

С.Г. Буланов

КОМПЬЮТЕРНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Разрабатывается подход к анализу устойчивости по Ляпунову систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Подход основан на векторных мультипликативных преобразованиях разностных схем численного интегрирования при ограничениях общего вида. В ходе преобразований величина возмущения решения определяется в виде бесконечного векторного произведения умноженного на возмущение начальных данных. Следовательно, бесконечное векторное произведение определяет характер устойчивости системы. Отсюда следуют критерии устойчивости и асимптотической устойчивости нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в мультипликативной форме. Математическая конструкция критериев влечет возможность их программной реализации, что служит основой компьютеризации анализа устойчивости по Ляпунову. Необходимая в процессе программной реализации замена бесконечного векторного произведения на конечное произведение, сохраняет достоверность анализа устойчивости по предложенным критериям. Далее конструируются разновидности критериев устойчивости в аддитивной и логарифмической форме эквивалентные ранее полученным критериям. При дополнительных ограничениях строятся критерии устойчивости по характеру поведения правой части нелинейной системы ОДУ и ее производных. Представлен программный и численный эксперимент по анализу устойчивости систем нелинейных ОДУ на основе полученных критериев. Эксперимент сводится к оценке величины из левой части критериев. Ее ограниченное изменение соответствует устойчивости, монотонное стремление к нулю характеризует асимптотическую устойчивость, неограниченный рост является признаком неустойчивости. По результатам эксперимента однозначно установлен характер устойчивости исследуемых систем. Предложенный подход дает возможность на практике выполнить анализ устойчивости по Ляпунову нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в режиме реального времени.

Устойчивость по Ляпунову; компьютерный анализ устойчивости; численное моделирование устойчивости.

S.G. Bulanov

A COMPUTER-ORIENTED APPROACH TO THE ANALYSIS OF THE LYAPUNOV STABILITY OF NONLINEAR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

An approach to the analysis of Lyapunov stability of systems of nonlinear ordinary differential equations is developed. The approach is based on vector multiplicative transformations of numerical integration difference schemes under general constraints. In the course of transformations, the magnitude of the perturbation of the solution is determined as an infinite vector product multiplied by the perturbation of the initial data. Consequently, the infinite vector product determines the nature of the stability of the system. This implies criteria for stability and asymptotic stability of a nonlinear system of ordinary differential equations in multiplicative form.

The mathematical construction of the criteria entails the possibility of their software implementation, which serves as the basis for computerization of the stability analysis according to Lyapunov. The replacement of an infinite vector product by a finite product, which is necessary in the process of software implementation, preserves the reliability of the stability analysis according to the proposed criteria. Further, varieties of stability criteria are constructed in additive and logarithmic form, equivalent to the previously obtained criteria. Under additional restrictions, stability criteria are constructed according to the nature of the behavior of the right side of the nonlinear system of ODEs and its derivatives. A software and numerical experiment is presented to analyze the stability of systems of nonlinear ODEs based on the obtained criteria. The experiment is reduced to estimating the value from the left side of the criteria. Its limited change corresponds to stability, the monotonous tendency to zero characterizes asymptotic stability, and unlimited growth is a sign of instability. According to the results of the experiment, the nature of the stability of the systems under study was unambiguously established. The proposed approach makes it possible in practice to perform a Lyapunov stability analysis of a nonlinear system of ordinary differential equations in real time.

Lyapunov stability; computer stability analysis; numerical modeling of stability.

Введение. Анализ устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) необходимо выполнять в различных областях современной науки и техники [1–3]. В частности такая задача возникает при моделировании и анализе устойчивости нелинейных динамических систем с логическими регуляторами. Для ее решения применяют подходы, базирующиеся на развитии метода функций Ляпунова, дивергентного, спектрального-бифуркационного метода, на представлении нелинейных систем с помощью ТС-моделей. Указанные методы позволяют получить конструктивные условия устойчивости и стабилизации некоторых классов управляемых систем [4]. Один из современных подходов к анализу устойчивости связан с предложением ввести понятие ключевая математическая модель. Данный подход позволяет с единой точки зрения рассматривать свойства устойчивости моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с запаздыванием, стохастическими дифференциальными уравнениями, дифференциальными включениями, нечеткими дифференциальными уравнениями. На этой основе получены теоремы о взаимосвязи устойчивости решений уравнений различных типов [5].

Традиционно анализ устойчивости систем ОДУ выполняется на основе методов качественной теории [6–8]. Между тем необходимость выполнять анализ устойчивости в режиме реального времени возникает при решении задач сверхоперативного управления, что возможно только средствами вычислительной техники [9, 10]. Это влечет необходимость разработки критериев устойчивости систем нелинейных ОДУ допускающих компьютерную реализацию.

В статье разрабатывается комплекс критериев устойчивости систем нелинейных ОДУ. Первоначально в условиях общего вида конструируются критерии устойчивости на основе преобразования разностных схем численного интегрирования. В дальнейшем требуется получить разновидности критерии устойчивости в аддитивной и логарифмической форме. Кроме того при дополнительных ограничениях необходимо сформулировать критерии устойчивости в зависимости от поведения правой части системы ОДУ и ее производных. Форма конструируемых критериев должна допускать программную реализацию, по результатам которой можно сделать однозначный вывод о характере устойчивости исследуемой системы в режиме реального времени.

Описание метода. Рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), Y(t_0) = Y_0, \quad (1)$$

где функция $F(t, Y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t в области $R: \{t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t): \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta, \delta > 0\}$. Предполагается, что для (1) в области R выполнены все условия существования и единственности решения и функция $F(t, Y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t , компоненты этой функции удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} |f_k(t, Y) - f_k(t, \tilde{Y})| &\leq L |y_k - \tilde{y}_k|, \quad L = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall (t, Y), \\ &\quad (t, \tilde{Y}) \in R, \quad \forall k \in \overline{1, n}. \end{aligned}$$

На произвольном промежутке $[t_0, t]$ решение системы (1) в форме метода Эйлера с остаточным членом на каждом шаге имеет вид:

$$y_{k(i+1)} = y_{ki} + h f_k(t_i, Y_i) + q_{ki} \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

где q_{ki} – остаточные члены формулы Тейлора для k -й компоненты решения.

Значение $t \in [t_0, \infty)$ является произвольно фиксированным, при этом индекс i неограниченно растет одновременно с убыванием равномерного шага:

$$t = \text{const}, \quad t = t_{i+1}, \quad h = (t_{i+1} - t_0)/(i+1), \quad i = 0, 1, \dots$$

Точное значение величины возмущения определяется из соотношения

$$\tilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = \left(1 + h \frac{f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{\tilde{y}_{ki} - y_{ki}} \right) (\tilde{y}_{ki} - y_{ki}) + w_{ki}, \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (2)$$

Рекуррентное преобразование (2) влечет соотношение

$$\tilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = \prod_{\ell=0}^i (1 + h D_{i-\ell}^{(k)}) (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) + L_i^{(k)},$$

где

$$L_i^{(k)} = \sum_{r=1}^i \prod_{\ell=0}^{i-r} (1 + h D_{i-\ell}^{(k)}) w_{k(r-1)} + w_{ki},$$

$$D_i^{(k)} = (f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)) / (\tilde{y}_{ki} - y_{ki}).$$

В рассматриваемых условиях $\lim_{i \rightarrow \infty} L_i^{(k)} = 0, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}$ [11].

Следовательно, для $\forall t \in [t_0, \infty)$ выполняется соотношение

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + h D_{i-\ell}^{(k)}) (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) \quad \forall k \in \overline{1, n} \quad (3)$$

смысл которого в том, что для произвольного t величина возмущения равна бесконечному векторному произведению, умноженному на возмущение начальных данных. На этой основе критерии устойчивости и асимптотической устойчивости имеют вид [12, 13]

$$\left| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + h D_{i-\ell}^{(k)}) \right| \leq \tilde{c}_1, \tilde{c}_1 = \text{const}, \forall t \in [t_0, \infty), \forall k \in \overline{1, n}. \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + h D_{i-\ell}^{(k)}) \right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (5)$$

$$\text{Так как для } \forall t \in [t_0, \infty) \text{ согласно (3) } \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + h D_{i-\ell}^{(k)}) = \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}}$$

то критерии (4), (5) можно представить в эквивалентной форме

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| \leq \tilde{c}_1, \tilde{c}_1 = \text{const}, \forall t \in [t_0, \infty), \forall k \in \overline{1, n}. \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (7)$$

Форма критериев (4)–(7) влечет возможность компьютерной реализации по ходу приближенного решения системы ОДУ. Для повышения достоверности анализа устойчивости целесообразно использовать методы Рунге-Кутты 4-го, Батчера 6-го, Дормана-Принса 8-го порядка.

Критерии (4)–(7) сводятся к аддитивной и логарифмической форме на основе следующего преобразования под знаком предела в (3)

$$\prod_{\ell=0}^i (1 + h D_{i-\ell}^{(k)}) = e^{\ln \prod_{\ell=0}^i (1 + h D_{i-\ell}^{(k)})} \quad \text{или} \quad \prod_{\ell=0}^i (1 + h D_{i-\ell}^{(k)}) = e^{\sum_{\ell=0}^i \ln(1 + h D_{i-\ell}^{(k)})}. \quad \text{В результате}$$

величина возмущения решения системы (1) определяется из соотношения

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = e^{\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i \ln(1 + h D_{i-\ell}^{(k)})} (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}), \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

Соответственно критерии устойчивости и асимптотической устойчивости преобразуются к аддитивной форме [14, 15]:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h D_{i-\ell}^{(k)} \leq \tilde{c}_2, \tilde{c}_2 = \text{const}, \forall t \in [t_0, \infty), \forall k \in \overline{1, n}.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h D_{i-\ell}^{(k)} = -\infty.$$

Выражение в левой части аддитивных критериев – предел интегральной суммы, элементами которой являются дискретные функции

$$D^{(k)}(t) = (f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)) / (\tilde{y}_k(t) - y_k(t)), \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

Следовательно, выражения аддитивных критериев включают определенные интегралы, и критерии можно сформулировать в интегральной форме.

$$\int_{t_0}^t \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)} dt \leq \tilde{c}_2, \tilde{c}_2 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)} dt = -\infty \quad \forall k \in \overline{1, n} \quad (9)$$

В переменной $D^{(k)}(t)$ числитель является производной возмущения решения и делится на само возмущение, следовательно существует первообразная:

$$\int_{t_0}^t D^{(k)}(t) dt = \ln \left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right|.$$

Соответственно критерии (8) (9) примут вид:

$$\ln \left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq \tilde{c}_2, \quad \tilde{c}_2 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| = -\infty \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

Далее приводится вывод критериев устойчивости по характеру поведения правой части нелинейной системы ОДУ и ее производных. Дополнительно предполагается существование и непрерывность в R второй производной решения системы (1) и выполнение для $F'(t, Y)$ аналога условия Липшица:

$$\begin{aligned} |f'_k(t, Y) - f'_k(t, \tilde{Y})| &\leq L_1 |f_k(t, Y) - f_k(t, \tilde{Y})|, \quad L_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \\ \forall (t, Y), (t, \tilde{Y}) \in R, \quad \forall k \in \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Кроме того, предполагается что $\exists \Delta_1 \leq \delta$, такое что $\forall \tilde{Y}(t): \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)} dt &\leq \tilde{c}_3 \int_{t_0}^t \frac{f'_k(t, \tilde{Y}) - f'_k(t, Y)}{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)} dt, \quad \tilde{c}_3 = \text{const}, \quad \tilde{c}_3 > 0, \\ \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n} \end{aligned} \quad (10)$$

или следующее неравенство, из которого следует (10)

$$\begin{aligned} \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)} &\leq \tilde{c}_4 \frac{f'_k(t, \tilde{Y}) - f'_k(t, Y)}{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}, \quad \tilde{c}_4 = \text{const}, \quad \tilde{c}_4 > 0, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \\ \forall k \in \overline{1, n}. \end{aligned}$$

При выполнении данных ограничений для устойчивости решения системы (1) достаточно существование Δ_2 , $0 < \Delta_2 \leq \delta$, такого что $\forall \tilde{Y}(t): \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_2$ выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^t \frac{f'_k(t, \tilde{Y}) - f'_k(t, Y)}{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)} dt \leq \tilde{c}_5, \quad \tilde{c}_5 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (11)$$

Для асимптотической устойчивости решения системы (1) достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало $\Delta_3 \leq \Delta_2$, такое что $\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_3$ влечет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{f'_k(t, \tilde{Y}) - f'_k(t, Y)}{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)} dt = -\infty. \quad (12)$$

Критерии устойчивости (11), (12) можно сформулировать в следующей эквивалентной форме. Для устойчивости решения системы (1) достаточно существование Δ_2 , $0 < \Delta_2 \leq \delta$, такого что $\forall \tilde{Y}(t): \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_2$ выполняется соотношение

$$\left| \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)} \right| \leq \tilde{c}_5, \quad \tilde{c}_5 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

$$f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0) \neq 0, \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (13)$$

Для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало $\Delta_3 \leq \Delta_2$, такое что $\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_3$ влечет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)} \right| = 0, \quad f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0) \neq 0, \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (14)$$

Если $\forall \tilde{Y}(t): \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_2$ дополнительно потребовать выполнение неравенства

$$\left| \int_{t_0}^t \frac{f'_k(t, \tilde{Y}) - f'_k(t, Y)}{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)} dt - \int_{t_0}^t \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)} dt \right| \leq c_0, \quad c_0 = \text{const}$$

$$\forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n} \quad (15)$$

то критерии (11)–(14) будут необходимыми и достаточными условиями устойчивости и асимптотической устойчивости.

Неравенство (15) можно преобразовать к виду

$$e^{-c_0} \leq \left| \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)} \right| / \left| \frac{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq e^{c_0}, \quad c_0 > 0, \quad c_0 = \text{const},$$

$$\forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

Выполнение последнего соотношения при $f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y) \rightarrow 0$ возможно только, если $\tilde{y}_k(t) - y_k(t) \rightarrow 0$, иначе не выполнится неравенство –

$$e^{-c_0} \leq \left| \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)} \right| / \left| \frac{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right|.$$

Если $\tilde{y}_k(t) - y_k(t) \rightarrow 0$, то необходимо $f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y) \rightarrow 0$, иначе нарушится неравенство –

$$\left| \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)} \right| / \left| \frac{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq e^{c_0}.$$

Предложенный подход допускает конструировать критерии устойчивости для производных правой части системы (1) произвольного порядка $\ell \geq 2$, если эти производные существуют. В этом случае критерии устойчивости и асимптотической устойчивости примут вид

$$\int_{t_0}^t \frac{f_k^{(\ell)}(t, \tilde{Y}) - f_k^{(\ell)}(t, Y)}{f_k^{(\ell-1)}(t, \tilde{Y}) - f_k^{(\ell-1)}(t, Y)} dt \leq \tilde{c}_6, \quad \tilde{c}_6 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

$$\forall \tilde{Y}(t): \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_2,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{f_k^{(\ell)}(t, \tilde{Y}) - f_k^{(\ell)}(t, Y)}{f_k^{(\ell-1)}(t, \tilde{Y}) - f_k^{(\ell-1)}(t, Y)} dt = -\infty \quad \forall k \in \overline{1, n}, \quad \forall \tilde{Y}(t): \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_3.$$

Полученные критерии будут необходимыми и достаточными условиями устойчивости и асимптотической устойчивости при ограничении

$$\left| \int_{t_0}^t \frac{f_k^{(\ell)}(t, \tilde{Y}) - f_k^{(\ell)}(t, Y)}{f_k^{(\ell-1)}(t, \tilde{Y}) - f_k^{(\ell-1)}(t, Y)} dt - \int_{t_0}^t \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)} dt \right| \leq c_0, \quad c_0 = \text{const}$$

$$\forall \tilde{Y}(t): \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_2.$$

При этом дополнительно потребуется выполнение для $F^{(\ell-1)}(t, Y)$ аналога условия Липшица. При переходе к первообразным критерии устойчивости и асимптотической устойчивости примут вид

$$\left| \frac{f_k^{(\ell-1)}(t, \tilde{Y}) - f_k^{(\ell-1)}(t, Y)}{f_k^{(\ell-1)}(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k^{(\ell-1)}(t_0, Y_0)} \right| \leq \tilde{c}_7, \quad \tilde{c}_7 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad (16)$$

$$f_k^{(\ell-1)}(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k^{(\ell-1)}(t_0, Y_0) \neq 0, \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{f_k^{(\ell-1)}(t, \tilde{Y}) - f_k^{(\ell-1)}(t, Y)}{f_k^{(\ell-1)}(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k^{(\ell-1)}(t_0, Y_0)} \right| = 0, \quad f_k^{(\ell-1)}(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k^{(\ell-1)}(t_0, Y_0) \neq 0,$$

$$\forall k \in \overline{1, n}.$$

Получены критерии устойчивости по характеру поведения правой части системы и ее производных. По аналогии с предыдущими критериями, они ориентированы на компьютерную реализацию и должны однозначно определять характер устойчивости исследуемой системы по ходу ее приближенного решения.

Численный и программный эксперимент. Эксперимент проводился с помощью ПК на базе процессора Intel(R) Core(TM) i5-4460 в среде программирования Delphi. На основе программ, реализующих конструкцию критериев (6), (13), (16) выполняется анализ устойчивости нелинейных систем ОДУ. Для каждого уравнения исследуемой системы вычисляется значение выражения из левой части критериев (6), (13), (16) и находится векторная норма. По поведению значений нормы делается вывод о характере устойчивости исследуемой системы [16]. Ограниченное изменение соответствует устойчивости, монотонное стремление к нулю характеризует асимптотическую устойчивость, неограниченный рост является признаком неустойчивости. Приближенные значения возмущенного и невозмущенного решения, входящие в конструкцию критериев (6), (13), (16) находятся с помощью метода Рунге–Кутты 4-го порядка. Для повышения достоверности анализа устойчивости приближенные значения решения, входящие в конструкцию критериев, целесообразно находить на основе кусочно-интерполяционной аппроксимации полиномами Ньютона и Лагранжа, преобразованными к форме с числовыми коэффициентами [17].

Пример 1. Исследуется на устойчивость решение системы

$$y_1' = -y_2 \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad y_2' = y_1 \sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \quad (17)$$

Известно, что общее решение системы имеет вид $y_1 = c_1 \cos(c_1 t + c_2)$, $y_2 = c_1 \sin(c_1 t + c_2)$. Нулевое решение системы (17) устойчиво, все остальные решения неустойчивы [18].

Первоначально исследуется нулевое решение системы (17). Компьютерный анализ устойчивости выполняется на промежутке $[0, 10^4]$ при значении шага разностной схемы 10^{-3} . Начальные значения компонент возмущенного решения $\tilde{y}_{10} = 10^{-5}$, $\tilde{y}_{20} = 2 \cdot 10^{-5}$. Результаты анализа устойчивости представлены в табл. 1. Во второй строке результаты анализа по критерию (6), в третьей строке по критерию (13), в четвертой по критерию (16).

Таблица 1

Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (17)

t	10^3	2×10^3	3×10^3	4×10^3	5×10^3
norma ₁	1.011	1.021	1.031	1.041	1.049
norma ₂	1.011	1.021	1.031	1.041	1.049
norma ₃	1.011	1.021	1.031	1.041	1.049
t	6×10^3	7×10^3	8×10^3	9×10^3	10^4
norma ₁	1.057	1.065	1.073	1.079	1.085
norma ₂	1.057	1.065	1.073	1.079	1.085
norma ₃	1.057	1.065	1.073	1.079	1.085

Значения нормы тождественно равны по трем критериям и ограничены константой, что свидетельствует об устойчивости нулевого решения системы (17).

Далее выполняется анализ устойчивости ненулевого решения системы (17) – $y_{10} = y_{20} = 0.01$, величина возмущения начальных данных $\delta = 10^{-5}$.

Таблица 2

Результаты анализа устойчивости ненулевого решения системы (17)

t	10^3	2×10^3	3×10^3	4×10^3	5×10^3
norma ₁	14,989	28,631	42,986	58,297	73,921
norma ₂	8,001	14,827	21,477	28,673	36,491
norma ₃	5,671	8,681	14,663	18,798	23,173
t	6×10^3	7×10^3	8×10^3	9×10^3	10^4
norma ₁	89,849	106,075	122,591	139,388	156,460
norma ₂	44,462	52,582	60,846	69,252	77,794
norma ₃	29,333	31,185	40,265	38,682	51,573

Наблюдается монотонный рост значений нормы по всем критериям, что свидетельствует о неустойчивости. Время работы программы при анализе нулевого решения ≈ 1.5 с., ненулевого ≈ 3 с. Полученные результаты анализа устойчивости системы (17) находятся в полном соответствии с представленными в [18].

Пример 2. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 - y_2 + y_1(y_1^2 + y_2^2), \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2 + y_2(y_1^2 + y_2^2). \end{cases} \quad (18)$$

Общее решение в аналитическом виде записывается следующим образом:

$$y_1 = \frac{\cos t}{\sqrt{1 + ce^{2t}}}, \quad y_2 = \frac{\sin t}{\sqrt{1 + ce^{2t}}}.$$

Нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво справа [19]. Компьютерный анализ устойчивости выполняется при численном значении величины возмущения и шага из примера 1.

Таблица 3

Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (18)

t	10^3	2×10^3	3×10^3	4×10^3	5×10^3
norma ₁	$5,539 \times 10^{-435}$	$5,739 \times 10^{-869}$	$1,849 \times 10^{-1303}$	$7,114 \times 10^{-1738}$	$7,179 \times 10^{-2172}$
norma ₂	$1,544 \times 10^{-434}$	$6,242 \times 10^{-869}$	$1,371 \times 10^{-1303}$	$1,845 \times 10^{-1737}$	$9,466 \times 10^{-2172}$
norma ₃	$5,539 \times 10^{-435}$	$5,739 \times 10^{-869}$	$1,849 \times 10^{-1303}$	$7,114 \times 10^{-1738}$	$7,179 \times 10^{-2172}$
t	6×10^3	7×10^3	8×10^3	9×10^3	10^4
norma ₁	$3,009 \times 10^{-2606}$	$9,684 \times 10^{-3041}$	$8,505 \times 10^{-3475}$	$4,516 \times 10^{-3909}$	$1,254 \times 10^{-4343}$
norma ₂	$1,789 \times 10^{-2606}$	$2,068 \times 10^{-3040}$	$1,348 \times 10^{-3474}$	$2,367 \times 10^{-3909}$	$2,122 \times 10^{-4343}$
norma ₃	$3,009 \times 10^{-2606}$	$9,684 \times 10^{-3041}$	$8,505 \times 10^{-3475}$	$4,516 \times 10^{-3909}$	$1,254 \times 10^{-4343}$

Монотонное убывание значений нормы к нулю по трем критериям свидетельствует об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (18).

Таким образом, результаты анализа устойчивости по представленным критериям находятся в полном соответствии с теоретическими оценками устойчивости. Предложенный подход целесообразно применять наряду с другими методами, допускающими компьютерную реализацию [20–22].

Заключение. Представлены критерии устойчивости и асимптотической устойчивости систем нелинейных ОДУ в виде необходимых и достаточных условий. Первоначально критерии получены при ограничениях общего вида на основе рекуррентных преобразований разностных схем численного интегрирования. Далее с помощью эквивалентных преобразований критерии преобразуются в аддитивную и логарифмическую форму. При дополнительных ограничениях конструируются критерии по характеру поведения правой части нелинейной системы ОДУ и ее производных. Форма критериев влечет возможность их программной реализации. Критерии инвариантны относительно правой части системы, разностных схем приближенного решения системы, длины промежутка и шага решения. Выполнена программная реализация критериев и на ее основе проведен анализ систем нелинейных ОДУ с априори известным характером устойчивости. Результаты численного эксперимента позволили достоверно установить характер устойчивости исследуемых систем в режиме реального времени и оказались в полном соответствии с ожидаемыми. В целом предложенный подход может стать основой для компьютеризации анализа устойчивости систем нелинейных ОДУ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А.Ю., Жабко А.П., Косов А.А. Анализ устойчивости и стабилизация нелинейных систем на основе декомпозиции // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1215-1233.

2. Мельников Г.И., Мельников В.Г., Дударенко Н.А., Талапов В.В. Устойчивость движения нелинейных динамических систем при постоянно действующих возмущениях // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2019. – Т. 19, № 2. – С. 216-221.
3. Миронов В.В., Митрохин Ю.С. Технологический подход к исследованию устойчивости динамических систем: прикладные вопросы // Вестник РГРТУ – 2017. – № 59. – С. 127-135.
4. Дружинина О.В., Масина О.Н. О подходах к анализу устойчивости нелинейных динамических систем с логическими регуляторами // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2017. – Т. 13, № 2. – С. 40-49.
5. Дружинина О.В., Масина О.Н. Системный подход к исследованию устойчивости моделей, описываемых дифференциальными уравнениями различных типов // Вестник Российской академии естественных наук. – 2015. – № 3. – С. 24-30.
6. Barreau M., Seuret A., Gouaisbaut F., Baudouin L. Lyapunov stability analysis of a string equation coupled with an ordinary differential system // IEEE Trans. Automatic Control. – 2018. available on HAL.
7. Luyckx L., Loccufier M., Noldus E. Computational methods in nonlinear stability analysis: stability boundary calculations // J. Comput. Appl. Math. – 2004. – Vol. 168, Issue 12. – P. 289-297.
8. Giesl P., Hafstein S. Computation of Lyapunov functions for nonlinear discrete time systems by linear programming // J. Difference Equ. Appl. – 2014. – Vol. 20, Issue 4. – P. 610-640.
9. Olgac N., Sipahi R. A practical method for analyzing the stability of neutral type LTI-time delayed systems // Automatica. – 2004. – Vol. 40, Issue 5. – P. 847-853.
10. Hafstein S. A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for nonlinear autonomous ordinary differential equations // Dynamical Systems. – 2005. – Vol. 20. – P. 281-299.
11. Ромм Я.Е. Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 107-124.
12. Буланов С.Г. Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 9. – С. 542-549.
13. Ромм Я.Е. Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости решений дифференциальных систем // Современные наукоемкие технологии. – 2020. – № 4. – С. 42-63.
14. Bulanov S.G. Differential systems stability analysis based on matrix multiplicative criteria // Journal of Physics: Conf. Series. – 2020. 1479 012103.
15. Bulanov S.G. Computer analysis of differential systems stability based on linearization and matrix multiplicative criteria // Journal of Physics: Conf. Series. – 2021. 1902 012101.
16. Буланов С.Г., Джанунц Г.А. Программный анализ устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе мультипликативных преобразований разностных схем и кусочно-полиномиальных приближений решения // Промышленные АСУ и контроллеры. – 2015. – № 2. – С. 10-20.
17. Джанунц Г.А., Ромм Я.Е. Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 10. – С. 1641-1660.
18. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1964. – 478 с.
19. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1971. – 576 с.
20. Doban A., Lazar M. Computation of Lyapunov functions for nonlinear differential equations via a Yoshizawa-type construction // 10th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems NOLCOS: IFAC-PapersOnLine. – 2016. – P. 29-34.
21. Xiao-Lin L., Yao-Lin J. Numerical algorithm for constructing Lyapunov functions of polynomial differential systems // J. Appl. Math. Comput. – 2009. – Vol. 29, Issue 1-2. – P. 247-262.
22. Zhaolu T., Chuanqing G. A numerical algorithm for Lyapunov equations // J. Appl. Math. Comput. – 2008. – Vol. 202, Issue 1. – P. 44-53.

REFERENCE

1. Aleksandrov A.Y., Zhabko A.P., Kosov A.A. Analiz ustoychivosti i stabilizatsiya nelineynykh sistem na osnove dekompozicii [Analysis of stability and stabilization of nonlinear systems via decomposition], *Sibirskij matematicheskij zhurnal* [Siberian mathematical journal], 2015, Vol. 56, No. 6, pp. 1215-1233.
2. Mel'nikov G.I., Mel'nikov V.G., Dudarenko N.A., Talapov V.V. Ustoychivost' dvizheniya nelineynykh dinamicheskikh sistem pri postoyanno deystvuyushhikh vozmushheniyah [Stability of nonlinear dynamical system motion under constantly acting perturbations], *Nauchno-tehnicheskij vestnik informatsionnykh tehnologiy, mekhaniki i optiki* [Scientific and technical journal of information technologies, mechanics and optics], 2019, Vol. 19, No. 2, pp. 216-221.
3. Mironov V.V., Mitrokhin Yu.S. Tekhnologicheskij podkhod k issledovaniyu ustoychivosti dinamicheskikh sistem: prikladnye voprosy [Constructive approach to the research of dynamic systems stability: applied problems], *Vestnik RGRTU* [Vestnik of RSREU], 2017, No. 59, pp. 127-135.
4. Druzhinina O.V., Masina O.N. O podhodakh k analizu ustoychivosti nelineynykh dinamicheskikh sistem s logicheskimi regulyatorami [On approaches to the stability analysis of nonlinear dynamic systems with logical controllers], *Sovremennye informatsionnye tehnologii i IT-obrazovanie* [Modern Information Technologies and IT-Education], 2017, Vol. 13, No. 2, pp. 40-49.
5. Druzhinina O.V., Masina O.N. Sistemnyy podkhod k issledovaniyu ustoychivosti modeley, opisyyaemykh differentsial'nymi uravneniyami razlichnykh tipov [System approach to stability research of the models described by the differential equations of different types], *Vestnik Rossiyskoy akademii estestvennykh nauk* [Herald of Russian Academy of Natural Sciences], 2015, No. 3, pp. 24-30.
6. Barreau M., Seuret A., Gouaisbaut F., Baudouin L. Lyapunov stability analysis of a string equation coupled with an ordinary differential system, *IEEE Trans. Automatic Control*, 2018, available on HAL.
7. Luyckx L., Loccufier M., Noldus E. Computational methods in nonlinear stability analysis: stability boundary calculations, *J. Comput. Appl. Math.*, 2004, Vol. 168, No. 12, pp. 289-297.
8. Giesl P., Hafstein S. Computation of Lyapunov functions for nonlinear discrete time systems by linear programming, *J. Difference Equ. Appl.*, 2014, Vol. 20, No. 4, pp. 610-640.
9. Olgac N., Sipahi R. A practical method for analyzing the stability of neutral type LTI-time delayed systems, *Automatica*, 2004, Vol. 40, No. 5, pp. 847-853.
10. Hafstein S. A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for nonlinear autonomous ordinary differential equations, *Dynamical Systems*, 2005, Vol. 20, pp. 281-299.
11. Romm Ya.E. Komp'yuterno-orientirovanny analiz ustoychivosti na osnove rekurrentnykh preobrazovaniy raznostnykh resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Computer-oriented stability analysis based on recurrent transformation of difference solutions of ordinary differential equations], *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis], 2015, Vol. 51, No. 3, pp. 416-431.
12. Bulanov S.G. Analiz ustoychivosti sistem lineynykh differentsial'nykh uravneniy na osnove preobrazovaniya raznostnykh skhem [Stability analysis of systems of linear differential equations based on transformation of difference schemes], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie], 2019, Vol. 20, No. 9, pp. 542-549.
13. Romm Ya.E. Komp'yuterno-orientirovanny analiz ustoychivosti resheniy differentsial'nykh sistem [Computer-oriented stability analysis of solutions of differential systems], *Sovremennye naukoemkie tehnologii* [Modern high technologies], 2020, No. 4, pp. 42-63.
14. Bulanov S.G. Differential systems stability analysis based on matrix multiplicative criteria, *Journal of Physics: Conf. Series*, 2020, 1479, 012103.
15. Bulanov S.G. Computer analysis of differential systems stability based on linearization and matrix multiplicative criteria, *Journal of Physics: Conf. Series*, 2021, 1902, 012101.
16. Bulanov S.G., Dzhannunts G.A. Programnyy analiz ustoychivosti sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy na osnove mul'tiplikativnykh preobrazovaniy raznostnykh skhem i kusochno-polinomial'nykh priblizheniy resheniya [Program analysis of stability of ordinary differential equations systems on the basis of multiplicative transformations of difference schemes and piecewise polynomial approximations of the solution], *Promyshlennyye ASU i kontroly* [Industrial Automatic Control Systems and Controllers], 2015, No. 2, pp. 10-20.

17. Dzhannunts G.A., Romm Ya.E. Var'iruemoe kusochno-interpolyatsionnoe reshenie zadachi Koshi dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s iteratsionnym utochneniem [The varying piecewise interpolation solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations with iterative refinement], *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics Journal], 2017, Vol. 57, No. 10, pp. 1616-1634.
18. Cesari L. Asimptoticheskoe povedenie i ustoychivost' resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations]. Moscow: Mir, 1964, 478 p.
19. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam [Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations]. Moscow: Science, 1971, 576 p.
20. Doban A., Lazar M. Computation of Lyapunov functions for nonlinear differential equations via a Yoshizawa-type construction, *10th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems NOLCOS: IFAC-PapersOnLine*, 2016, pp. 29-34.
21. Xiao-Lin L., Yao-Lin J. Numerical algorithm for constructing Lyapunov functions of polynomial differential systems, *J. Appl. Math. Comput.*, 2009, Vol. 29, No. 1-2, pp. 247-262.
22. Zhaolu T., Chuanqing G. A numerical algorithm for Lyapunov equations, *J. Appl. Math. Comput.*, 2008, Vol. 202, No. 1, pp. 44-53.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.В. Курейчик.

Буланов Сергей Георгиевич – Ростовский государственный экономический университет; e-mail: bulanovtgp@mail.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: 89281250973; доцент.

Bulanov Sergei Georgievich – Rostov State University of Economics; e-mail: bulanovtgp@mail.ru; Taganrog, Russia; phone: +79281250973; associate professor.

УДК 621.9

DOI 10.18522/2311-3103-2023-4-137-151

Е.В. Федорина, И.Ф. Дьяков, О.Г. Крупенников

АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕСУРСОСБЕРЕГАЮЩЕГО РАСКРОЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕСУРС-СТОИМОСТНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

Применяемые программы и САПР по раскрою различных материалов эффективны в условиях единичного и многономенклатурного мелкосерийного производства с применением группового метода раскроя на заготовки произвольной геометрической формы. При раскрое листового и рулонного металлопроката в условиях крупносерийного и массового производства, характеризующегося индивидуальным раскромом на одноименные заготовки, созданные программы имеют ограниченное применение. Для автоматизированного раскроя в условиях такого производства необходима адаптация применяемых или создание новых систем и программ с применением современных подходов и новой схемы проектирования раскроя на основе использования нового показателя эффективности раскроя с минимизацией себестоимости выпускаемой продукции, ведения расчета для деталей одной группы (по марке и толщине), что позволит рационально подбирать отходы на другие детали данной группы. Для решения поставленной задачи предложена и рассмотрена в статье новая модель оптимизации гильотинного раскроя с минимизацией затрат на металл и снижением себестоимости раскройных изделий. Для реализации автоматизированного проектирования раскроя в зависимости от нового ресурс-стоимостного показателя (РСП) и управления информацией о подетальном раскроме металла в ходе проведенных авторами исследований разработана база данных «Кластер деталей «ПРОМ-2013»» и программа «ПРОМ-2013», позволяющая произвести оценку эффективности раскроя по РСП и выбрать оптимальный вариант. На примере детали «Панель боковины» показаны эффективность разработанного алгоритма и этапы автоматизированного проектирования оптимального раскроя на основе показателя РСП с формированием выходных документов «карт раскроя материалов».

Оптимальный раскрой; ресурс-стоимостной показатель; база данных; программа оптимизации раскроя.