

Д.В. Тимошенко**ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ**

Исследуется проблема интегрирования системы уравнений электродинамики приземного слоя атмосферы для различных случаев электродного эффекта. Исходная система дифференциальных уравнений электродного эффекта приводится к так называемому уравнению полного тока, представляющему собой уравнение второго порядка параболического типа, рассматриваемое в двумерной области пространство-время. Уравнение полного тока позволяет связать совокупность основных факторов, влияющих на состояние электрического поля приземного слоя атмосферы: ток проводимости, турбулентный ток и ток, возникающий в результате конвективных процессов в атмосфере с так называемым полным током в приземном слое, отражающим изменение потенциала ионосферы. Описанный способ дает значительные преимущества в исследовании, поскольку в рамках одной модели позволяет осуществлять постановки различных задач электродинамики приземного слоя и проводить сравнительный анализ влияния на поведение электрического поля в приземном слое как отдельных факторов, так и их совокупностей. Целью работы является анализ математических аспектов рассматриваемых моделей с точки зрения подходов к интегрированию уравнения полного тока. В рамках исследования проводится сопоставление особенностей физических постановок и их влияние на структуру математических модели и их свойства с точки зрения математической физики. Рассмотренные различные физические постановки показывают, что даже в относительно простой математической модели, состоящей из одного уравнения, дополненного начальными-краевыми условиями, возникает достаточно широкий спектр как модельных формулировок, так и подходов к интегрированию рассмотренных моделей.

Математическое моделирование; электродинамика; приземный слой; атмосфера; электродный эффект; электрическое поле.

D.V. Timoshenko**FEATURES OF MATHEMATICAL MODELING IN THE GROUND LAYER
ELECTRODYNAMICS**

The paper examines the problem of integrating the system of electrodynamic equations of the atmosphere surface layer for various cases of the electrode effect. The original system of differential equations of the electrode effect is reduced to the so-called total current equation, which is a second-order equation of parabolic type, considered in a two-dimensional space-time region. The total current equation allows us to relate the set of main factors influencing the state of the electric field in the atmosphere surface layer: conduction current, turbulent current and current arising as a result of convective processes in the atmosphere with the so-called total current in the surface layer, reflecting changes in the potential of the ionosphere. The described method provides significant advantages in the study, since within the framework of one model it allows the formulation of various problems of the surface layer electrodynamics and a comparative analysis of the influence of both individual factors and their combinations on the behavior of the electric field in the surface layer. The purpose of the work is to analyze the mathematical aspects of the models under consideration from the point of view of approaches to integrating the total current equation. The study compares the features of physical formulations and their influence on the structure of mathematical models and their properties from the point of view of mathematical physics. The various physical formulations considered show that even in a relatively simple mathematical model consisting of one equation supplemented with initial boundary conditions, a fairly wide range of both model formulations and approaches to integrating the considered models arises.

Mathematical modeling; electrodynamics; surface layer; atmosphere; electrode effect; electric field.

Введение. Дифференциальные уравнения электродинамики атмосферы основываются на классических уравнениях Максвелла [1, 2], и в приближении электродного эффекта математическая модель горизонтально-однородного свободного от аэрозоля приземного слоя с учетом турбулентного и конвективного переносов [2–4] имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} (b_{1,2} \cdot n_{1,2} \cdot E) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D_T(z, t) \cdot \frac{\partial n_{1,2}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (v(z, t) \cdot n_{1,2}) = q(z, t) - \alpha n_1 n_2, \\ \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_1 - n_2) \end{cases} \quad (1)$$

Решениями уравнений в системе (1) являются функции распределения концентрации полярных аэроионов ($n_{1,2}$) и напряженность электрического поля (E) по времени (t) и высоте (z). Параметрами модели являются подвижности ($b_{1,2}$) полярных аэроионов, коэффициенты рекомбинации (α) и турбулентной диффузии (D_T), скорости конвективного переноса (v) и ионизации воздуха (q), а также элементарный заряд (e) и электрическая постоянная (ε_0).

Приведение системы уравнений электродного эффекта к уравнению полного тока. Положим в системе (1) $v = \text{const}$, $D_T = D_1 = \text{const}$ и исследуем модель методами теории подобия. Используя характерные значения и масштабы входящих в уравнения величин, введем безразмерные переменные:

$$t' = t/T, \quad z' = z/l_1, \quad n'_{1,2} = n_{1,2}/n_\infty, \quad E' = E/E_\infty, \quad n_\infty = \sqrt{q_\infty/\alpha}, \quad l_1 = D_1 \cdot \tau, \quad \tau = (q_\infty \alpha)^{-1/2}. \quad (2)$$

Индексом « ∞ » обозначим верхнюю границу электродного слоя. Тогда первые два уравнения системы (1) принимают вид:

$$\tau \frac{\partial n'_1}{\partial t'} + \tau b_1 E_\infty \frac{\partial (n'_1 E')}{\partial z'} - D_1 \tau \frac{\partial}{\partial z'} \left(z' \frac{\partial n'_1}{\partial z'} \right) + \nu \tau \frac{\partial n'_1}{\partial z'} = 1 - n'_1 n'_2, \quad (3)$$

$$\tau \frac{\partial n'_2}{\partial t'} - \tau b_2 E_\infty \frac{\partial (n'_2 E')}{\partial z'} - D_1 \tau \frac{\partial}{\partial z'} \left(z' \frac{\partial n'_2}{\partial z'} \right) + \nu \tau \frac{\partial n'_2}{\partial z'} = 1 - n'_1 n'_2. \quad (4)$$

Выделим из уравнений (3), (4) характерные пространственные масштабы: $L_{nE1} = b_1 E_\infty \tau$, $L_{nE2} = b_2 E_\infty \tau$, $L_D = D_1 \tau$, $L_v = \nu \tau$. Первые два определяют профили полярных аэроионов вследствие действия классического электродного эффекта [2,3], а последние соответствуют высоте конвективно-турбулентного электродного слоя [6]. Принимая значения параметров равными: $q = 7 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$, $E = -100 \text{ В/м}$, $D_1 = 0,1 \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu = 0,1 \text{ м/с}$, получаем: $\tau \approx 300 \text{ с}$, $L_{nE1} = 3,6 \text{ м}$, $L_{nE2} = 4,2 \text{ м}$, $L_D = 30 \text{ м}$, $L_v = 30 \text{ м}$.

Далее запишем систему (1) в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \frac{\tau}{T} \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial t'} \pm \frac{b_{1,2} E_\infty}{D_1} \frac{\partial}{\partial z'} (n'_{1,2} \cdot E') - \frac{\partial}{\partial z'} \left(z' \cdot \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial z'} \right) + \frac{\nu}{D_1} \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial z'} = \frac{q}{q_\infty} - n'_1 \cdot n'_2, \\ \frac{\partial E'}{\partial z'} = \frac{e \cdot n_\infty l_1}{\varepsilon_0 E_\infty} (n'_1 - n'_2), \end{cases} \quad (5)$$

Системе (5) характеризуется следующие безразмерными параметрами (критериями подобия):

$$\xi_{1,2} = \frac{|b_{1,2}| \cdot E_{\infty} \cdot \tau}{l_1} = \frac{|b_{1,2}| E_{\infty}}{D_1}, \chi = \frac{\nu}{D_1}, \gamma = \frac{en_{\infty} l_1}{\varepsilon_0 E_{\infty}} = \frac{en_{\infty} D_1 \tau}{\varepsilon_0 E_{\infty}}. \quad (6)$$

Запишем систему (1) в безразмерной форме:

$$\begin{cases} \frac{\tau}{T} \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial t'} \pm \xi_{1,2} \frac{\partial}{\partial z'} (n'_{1,2} \cdot E') - \frac{\partial}{\partial z'} \left(z' \cdot \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial z'} \right) + \chi \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial z'} = \frac{q}{q_{\infty}} - n_1 \cdot n_2, \\ \frac{\partial E'}{\partial z'} = \gamma (n'_1 - n'_2), \end{cases} \quad (7)$$

Физический смысл критериев подобия состоит в следующем [1, 2]: $\xi_{1,2} \geq 1$ характеризует собой случай классического электродного эффекта в приземном слое, $\xi_{1,2} < 1$ – турбулентный электродный эффект, при условии $\xi_{1,2} < 1$ уже имеет место, так называемое, приближение сильного турбулентного перемешивания, значение γ определяет влияние объёмного заряда на электрическое поле, параметр χ определяет соотношение конвективного и турбулентного переносов. Метеорологические процессы в атмосфере протекают в среднем $T \sim 1-3$ ч, т.е. ($\tau \ll T$). Последнее соотношение является основанием для дальнейшего рассмотрения стационарного варианта системы (1) и получения аналитических решений.

Из системы (1) следует уравнение для плотности полного электрического тока (j) в приземном слое атмосферы, который состоит из тока проводимости, турбулентного и конвективного токов [1, 3], [12–15]. В стационарном случае имеем:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \varepsilon_0 D_T(t, z) \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \varepsilon_0 v(z) \frac{\partial E}{\partial z} + \lambda(z) E = j(t). \quad (8)$$

Здесь λ – электрическая проводимость воздуха.

Уравнение (8) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка параболического типа с переменными коэффициентами. Данное уравнение применимо для описания широкого класса задач электродинамики приземного слоя атмосферы, поскольку позволяет учитывать одновременно воздействие локальных факторов на местности: проводимость атмосферы, температуру, метеорообстановку посредством соответствующих слагаемых в левой части, выражающих компоненты тока, и одновременно с этим модель отражает воздействие на электрическое поле приземного слоя глобальной вариации потенциала ионосферы, описываемого соответствующим законом изменения плотности полного тока в правой части уравнения (8). Решение уравнения (8) определяет зависимость напряженности электрического поля от времени и высоты в пределах приземного слоя [16–18].

Подходы к интегрированию уравнения полного тока для различных моделей электродного эффекта. Рассмотрим далее преобразования уравнения (8) для различных моделей электродного эффекта и соответствующие изменения подходов к его интегрированию. Можно выделить следующие основные модели электродного эффекта: турбулентный, конвективный, смешанный. Данные разновидности задач будут определять вид левой части дифференциального уравнения (8). Правая часть уравнения (плотность полного тока) также может иметь постоянный или переменный характер.

В дальнейшем в качестве общего для всех моделей электродного эффекта будем рассматривать одно из распространенных представлений глобального суточного изменения плотности тока [6, 15, 19, 20].

Таковым является представление плотности тока в виде гармонической функции, отражающей унитарную вариацию потенциала ионосферы [6]:

$$j(t) = j_0(1 - \alpha \sin(\omega t)), \quad \omega = 2\pi/T. \quad (9)$$

При значениях параметров $\alpha = 0,2$ и $T = 24$ ч функция суточного изменения электрического тока имеет вид волны с минимумом в 06^h UT и максимумом в 18^h UT и амплитудой 20% (отклонения от среднего значения), что достаточно хорошо согласуется с унитарной вариацией [3]. Поскольку зависимость плотности тока от координаты в рассматриваемых задачах не предполагается, не уменьшая общности, будем считать, что суточные вариации описываются соотношением (9).

Модель турбулентного электродного слоя. Данная модель электродного эффекта предполагает учет в качестве основного фактора, влияющего на поведение напряженности поля в приземном слое, так называемый метеорологический фактор, определяющий скорость ветра в районе исследований. Данный фактор описывается коэффициентом турбулентной диффузии (D_T), который в общем случае может представлять собой функцию высоты и времени. В уравнении (8) величина (D_T) представляет собой коэффициент при старшей производной от напряженности поля по высоте и таким образом оказывает определяющее влияние на тип уравнения (8).

Рассмотрим следующие постановки задачи моделирования турбулентного электродного эффекта [16–18].

1. Коэффициент турбулентной диффузии – функция времени. В данной постановке предполагается, что величина (D_T) задается соотношением:

$$D_T(t) = D_0(2 - \cos \omega t), \quad (10)$$

повторяющим закон изменения плотности полного тока (9). Также предполагаем, что конвективные процессы отсутствуют, что соответствует условию $v(z) = 0$. Дополнительно будем считать, что электрическая проводимость воздуха также является постоянной: $\lambda = \text{const}$.

При описанных предположениях исследуемое уравнение (8) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \varepsilon_0 D_0(2 - \cos \omega t) \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \lambda E = j(t). \quad (11)$$

В качестве начальных и граничных условий для уравнения (11) принимаем следующие [3]:

$$E|_{t=0} = E_0 e^{-\frac{z}{L}}, \quad E|_{z=0} = E_0, \quad \left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_{z=z_\infty} = 0. \quad (12)$$

В результате получаем нестационарную начально-краевую задачу (11)–(12) для уравнения параболического типа (11) относительно неизвестной функции $E_1(t, z)$ с неоднородным начальным и граничными условиями (12). Данная задача представляет собой задачу с положительно определенным самосопряженным дифференциальным оператором относительно координаты в левой части уравнения (11), поэтому данная задача разрешима при помощи метода Фурье [6].

Решение задачи (11)–(12) подробно изложено в работе [8], здесь приведем только основные положения данного случая.

Поскольку граничные условия (12) являются неоднородными, необходимо выполнить следующую замену переменных: $E - E_0 = E_1(t, z)$. При указанной замене уравнение (11) сохраняет свою структуру, однако граничные условия становятся однородными:

Неизвестную функцию представим в виде ряда:

$$E_1 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \Phi_n(z), \quad (13)$$

где функции $\{\Phi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ образуют полную ортонормированную систему оператора Штурма-Лиувилля:

$$-D_0 \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = \mu \Phi(z), \quad (14)$$

с граничными условиями:

$$\Phi(0) = \Phi(L) = 0. \quad (15)$$

Собственные числа и собственные функции задачи (14) имеют вид:

$$\mu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2L} \right)^2, \quad \Phi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi(2n-1)}{2L} z. \quad (16)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение полного тока интегрируется по классической схеме метода Фурье.

2. Коэффициент турбулентной диффузии – функция координаты. Данный случай предполагает, что коэффициент турбулентной диффузии представляется в виде [3]:

$$D_T(z) = D_m z^m, \quad (17)$$

где $m = 0; 1; 4/3$.

При этом относительно выбранной закономерности поведения величины $D_T(z)$ можно рассматривать как нестационарную, так и стационарную задачу [19, 20].

В случае стационарной задачи уравнение полного тока преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно напряженности электрического поля приземного слоя. Такое уравнение решается как обыкновенное дифференциальное линейное неоднородное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Для решения такого уравнения стандартным методом служит представление решения в виде степенного ряда. Соответствующее решение получено в [6].

Для нестационарной задачи уравнение (8) с учетом зависимости (17) преобразуется к виду [8].

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[D_T(z) \frac{\partial E}{\partial z} \right] + \lambda E = j(t). \quad (18)$$

Начальные и граничные условия для задачи (18) сохраняют форму (12).

Дифференциальный оператор в левой части уравнения (18) для коэффициента турбулентной диффузии, заданного зависимостью (17) не является положительно определенным [10]. В соответствии с теорией метода Фурье в данной ситуации допустимо существование так называемого «весового» множителя $g(z)$, при умножении на который обеих частей уравнения (8), соответствующий дифференциальный оператор вновь становится оператором Штурма-Лиувилля, а система собственных функций этого оператора является ортогональной с «весом» $g(z)$. Далее решение задачи (18) находится методом Фурье.

В случае, когда дифференциальный оператор в правой части уравнения (8) не удовлетворяет условиям положительной определенности и самосопряженности, и соответствующий весовой множитель отсутствует, это не позволяет построить полную ортонормированную систему собственных функций соответствующей краевой задачи, для интегрирования краевой задачи можно воспользоваться одним из приближенных методов. Одним из широко распространенных методов приближенного решения задачи (8) в этом случае является метод Галеркина [11]. Данный метод заключается в том, что выбирается конечная система базисных функций $\{u_i(x)\}_{i=1}^n$, составляющих часть некоторой полной системы, причем необходимо, чтобы функция $u_0(x)$ удовлетворяла неоднородным краевым условиям, в нашем случае: $u_0|_{z=0} = E_0$.

При этом функции $u_i(x)$ удовлетворяют однородному краевому условию:

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|_{z=z_\infty} = 0.$$

В таком случае решение начально-краевой задачи можно искать в виде конечного соотношения:

$$E = u_0(z) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(z). \quad (19)$$

Подстановка соотношения (18) в исходное дифференциальное уравнение (8) приводит к так называемой невязке:

$$R(z, C_1, C_2, \dots, C_n) = L[u_0] + \sum_{i=1}^n C_i L[u_i] - E(z). \quad (20)$$

В случае точного решения рассматриваемой краевой задачи величина невязки тождественно обращается в нуль ($R \equiv 0$); поэтому для получения приближенного решения, близкого к точному, необходимо подобрать коэффициенты C_i таким образом, чтобы невязка R была в каком-то смысле малой.

Для обеспечения этого условия в методе Галеркина формулируется требование, чтобы невязка была ортогональна к каждой из базисных функций $\{u_i(x)\}_{i=1}^n$, тогда при достаточно большом числе этих функций обеспечит малость невязки в силу следующей теоремы [11]:

Теорема. Пусть $\{u_i(x)\}_{i=1}^\infty$ – полная система функций с ненулевой нормой, ортогональных на отрезке $[a, b]$. Если непрерывная функция $f(x)$ ортогональна на отрезке $[a, b]$ ко всем функциям $\{u_i(x)\}_{i=1}^\infty$, то есть

$$\int_a^b f(x)u_n(x)dx = 0 \quad (n=1,2,...), \quad (21)$$

$$m_0 \quad f(x) \equiv 0 \text{ npu } a \leq x \leq b.$$

Основываясь на приведенной теореме, приходим к следующей системе линейных уравнений для определения коэффициентов C_i :

$$\begin{aligned} & \int_a^b u_1(x) R(z, C_1, \dots, C_n) dx = 0, \\ & \dots\dots\dots , \\ & \int_a^b u_n(x) R(z, C_1, \dots, C_n) dx = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

или более развернуто

$$\sum_{i=1}^n C_i \int_a^b u_i(z) L[u_i] dz = \int_a^b u_i(z) (E(z - L[u_0])) dz. \quad (23)$$

Достаточные условия сходимости метода Галеркина, а также доказательство теоремы приведены в работе [11].

Модель конвективно-турбулентного электродного слоя. В стационарном случае уравнение для полного электрического тока (j_0) в приземном слое атмосферы состоит из суммы токов проводимости, турбулентного и конвективного токов [1, 3, 21]:

$$-\varepsilon_0 D(z) \frac{d^2 E}{dz^2} + \varepsilon_0 V(z) \frac{dE}{dz} + \lambda E = j_0 \quad (24)$$

с граничными условиями:

$$E|_{z=z_0} = E_0, \quad E|_{z=L} = j_0/\lambda. \quad (25)$$

Рассмотренные ниже случаи математически объединяются стационарным характером рассматриваемых задач. Дополнительным упрощением служит тот факт, что стационарный характер приводит к тому, что модельные уравнения становятся обыкновенными. При этом рассматриваемые уравнения в некоторых случаях являются неоднородными уравнениями с переменными коэффициентами, что побуждает применять для их интегрирования метод степенных рядов [10]. Подробно рассмотренные ниже задачи проинтегрированы и исследованы в работах [7, 8], ниже приводится сравнение математических постановок и вида решений.

1. Рассмотрим случай, когда конвективный перенос преобладает над турбулентным перемешиванием и положим $V(z) = V_0 = const$. Тогда уравнение полного тока с граничным условием примут вид:

$$\varepsilon_0 V_0 \frac{dE}{dz} + \lambda E = j, \quad E|_{z=L} = j/\lambda. \quad (26)$$

Решение уравнения (26) имеет вид:

$$E(z) = \frac{j}{L\lambda} e^{\lambda \varepsilon_0 V_0 (L-z)} \cdot z. \quad (27)$$

2. Далее рассмотрим общий случай зависимости скорости конвекции от высоты внутри электродного слоя: $V(z) = V_1 \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)$. В этом случае уравнение (26) принимает вид:

$$\varepsilon_0 V_1 \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \frac{dE}{dz} + \lambda E = j_0. \quad (28)$$

Решение уравнения (28) имеет вид:

$$E(z) = E_0 \left(\frac{L - z_0}{z_0} \right)^{\frac{\lambda L}{\varepsilon_0 V_1}} \left(\frac{L - z}{z} \right)^{-\frac{\lambda L}{\varepsilon_0 V_1}} + \frac{j_0}{\lambda}. \quad (29)$$

3. Рассмотрим случай, когда коэффициент турбулентной диффузии ($D(z) = D_0 = \text{const}$) и скорость конвективного переноса ($V(z) = V_0 = \text{const}$) имеют соизмеримые значения.

Уравнение (24) примет вид:

$$-\varepsilon_0 D_0 \frac{d^2 E}{dz^2} + \varepsilon_0 V_0 \frac{dE}{dz} + \lambda E = j_0, \quad (30)$$

а граничные условия сохранятся в форме соотношений (2). Из уравнения (7) находим зависимость напряженности электрического поля от высоты:

$$E(z) = \frac{(E_0 - j_0/\lambda)}{e^{k_2 z_0} - e^{(-k_2)L + k_2 z_0}} e^{k_2 z} + j_0/\lambda, \quad k_2 = \frac{-\varepsilon_0 V_0 + \sqrt{(\varepsilon_0 V_0)^2 + 4\varepsilon_0 D_0 \lambda}}{-2\varepsilon_0 D_0}. \quad (31)$$

4. Рассмотрим случай, когда турбулентный перенос преобладает над конвективным, и при этом коэффициент турбулентной диффузии является функцией высоты: $D(z) = D_1 z$. В этом случае уравнение (24) принимает вид:

$$-\varepsilon_0 D_1 z \frac{d^2 E}{dz^2} + \lambda E = j_0, \quad (32)$$

а граничные условия сохраняют форму (25). Решение этого уравнения может быть найдено в виде степенного ряда относительно координаты, который следующим соотношением:

$$E(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k!) \varepsilon_0 D_1} z^{3k} + \frac{j_0}{\lambda}. \quad (33)$$

5. Наконец, рассмотрим модель, описывающую одновременное влияние на поведение напряженности электрического поля турбулентных и конвективных процессов. В качестве законов, описывающих поведение соответствующих коэффициентов, примем следующие:

$$D(z) = D_1 z, \quad V(z) = V_1 \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l} \right). \quad (34)$$

В этом случае уравнение (24) принимает вид:

$$-\varepsilon_0 D_1 z \frac{d^2 E}{dz^2} + \varepsilon_0 V_1 \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l} \right) \frac{dE}{dz} + \lambda E = j_0, \quad (35)$$

а граничные условия сохраняют форму (25).

Решение уравнения (35) также может быть представлено в виде степенного ряда:

$$E(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+3)(k-1)}{(k!)(k+2)!(\varepsilon_0(D_1+V_1))} z^{3k+2} + \frac{j_0}{\lambda}. \quad (36)$$

Заключение. В работе рассмотрены особенности моделирования задач электродинамики приземного слоя на примере уравнения плотности полного электрического тока. Рассмотренные различные физические постановки показывают, что даже в относительно простой математической модели, состоящей из одного уравнения, дополненного начально-краевыми условиями, возникает достаточно широкий спектр как модельных формулировок, так и подходов к интегрированию рассмотренных моделей. Безусловно, наибольший интерес представляют случаи нестационарных задач второго порядка для параболических уравнений с дифференциальным оператором, не являющимся оператором Штурма-Лиувилля. Задачи данного вида не разрешимы с помощью классического метода Фурье и, вообще говоря, нуждаются в формировании самостоятельной теории построения системы собственных функций, что предполагается в качестве предмета для дальнейших исследований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Морозов В.Н. Атмосферное электричество // Атмосфера. Справочник (справочные данные, модели). – Л.: Гидрометеиздат, 1991. – С. 394-408.
2. Куповых Г.В., Морозов В.Н., Шварц Я.М. Теория электродного эффекта в атмосфере. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1998. – 123 с.
3. Куповых Г.В. Электродинамические процессы в приземном слое атмосферы. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. – 114 с.
4. Свидельский С.С., Литвинова В.С., Куповых Г.В., Клово А.Г. Формирование структуры атмосферного электродного слоя // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2020. – № 5. – С. 130-141.
5. Шулейкин В.Н., Жукин Г.Г., Куповых Г.В. Развитие методов и средств прикладной геофизики – атмосферно-электрический мониторинг геологических неоднородностей и зон геодинамических процессов. – СПб.: РГТМУ, 2015. – 206 с.
6. Аджиев А.Х., Клово А.Г., Кудринская Т.В., Куповых Г.В., Тимошенко Д.В. Суточные вариации электрического поля в приземном слое атмосферы // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 452-461.
7. Куповых Г.В., Белоусова О.В., Тимошенко Д.В., Клово А.Г., Кудринская Т.В. Электродинамическая модель турбулентно-конвективного приземного слоя: приближенные аналитические решения // Матер. IX Всероссийской научной конференции по атмосферному электричеству. – СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2023. – С. 488-496.
8. Белоусова О.В., Тимошенко Д.В., Куповых Г.В. Математическое моделирование электрической структуры турбулентно-конвективного приземного слоя // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. – 2023. – № 3 (51). – С. 12-19.

9. *Кутовых Г.В., Тимошенко Д.В., Клово А.Г., Кудринская Т.В.* Влияние электродного эффекта на суточные вариации электрического поля атмосферы в приземном слое // *Оптика атмосферы и океана*. – 2023. – Т. 36, № 10. – С. 834-838.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
11. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Гостехиздат, 1957. – 450 с.
12. *Williams E.R., Mareev E.A.* Recent progress on the global electrical circuit // *Atmos. Res.* – 2014. – Vol. 135–136. – P. 208-227.
13. *Liu C., Williams E.R., Zipser E.J., Burns G.* Diurnal variation of global thunderstorms and electrified shower clouds and their contribution to the global electrical circuit // *J. Atmos. Sci.* – 2010. – Vol. 67, No. 2. – P. 309-323.
14. *Mach D.M., Blakeslee R.J., Bateman M.G.* Global electric circuit implications of combined aircraft storm electric current measurements and satellite-based diurnal lightning statistics // *J. Geophys. Res.* – 2011. – Vol. 59, No. 1. – P. 183-204.
15. *Harrison R.G.* The Carnegie curve // *Surveys in Geophysics*. – 2013. – 34 (2). – P. 209-232.
16. *Kupovykh G.V., Timoshenko D.V., Klovo A.G., Kudrinskaya T.V.* Electrodynamic processes models in atmospheric surface layer // *CATPID-2019. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. – 2019. – Vol. 698 (4). – P. 44034.
17. *Kupovykh G., Klovo A., Timoshenko D.* The atmospheric electric field variations in the surface layer // *Russian Open Conference on Radio Wave Propagation (RWP)*. 1-6 July 2019. – Publisher: IEEE, 2019. – P. 580-583.
18. *Kupovykh G.V., Timoshenko D.V., Kudrinskaya T.V., Klovo A.G.* Modeling of the atmospheric electric field local variations in the turbulent surface layer // *Journal of Physics: IOP Conference Series. VIII All-Russian Conference on Atmospheric Electricity*. – 2020. – Vol. 1604 (1). – P. 012003.
19. *Hoppel W.A.* Theory of the electrode effect // *Journal Atmospheric and Terrestrial Physics*. – 1967. – Vol. 29, No. 6. – P. 709-721.
20. *Evtushenko A.A., Mareev E.A.* On the generation of charge layers in MCS stratiform regions // *Atmospheric Research*. – 2009. – Vol. 91. – P. 272-280.
21. *Kudrinskaya T.V., Klovo A. G., Kupovykh G.V., Timoshenko D.V.* Reduction coefficient and electric field near plane electrode with geometric heterogeneity // *Journal of Physics: IOP Conf. Series. VIII All-Russian Conference on Atmospheric Electricity*. – 2020. – Vol. 1604 (1). – P. 012005.

REFERENCES

1. *Morozov V.N.* Atmosfernoe elektrichestvo [Atmospheric electricity], *Atmosfera. Spravochnik (spravochnye dannye, modeli)* [Atmosphere. Directory (reference data, models)]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1991, pp. 394-408.
2. *Kupovykh G.V., Morozov V.N., Shvarts Ya.M.* Teoriya elektrodnoogo effekta v atmosfere [Theory of the electrode effect in the atmosphere]. Taganrog: Izd-vo TRTU, 1998, 123 p.
3. *Kupovykh G.V.* Elektrodinamicheskie protsessy v prizemnom sloe atmosfery [Electrodynamic processes in the surface layer of the atmosphere]. Taganrog: Izd-vo TTI YuFU, 2009, 114 p.
4. *Svidel'skiy S.S., Litvinova V.S., Kupovykh G.V., Klovo A.G.* Formirovanie struktury atmosfer'nogo elektrodnoogo sloya [Formation of the structure of the atmospheric electrode layer], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2020, No. 5, pp. 130-141.
5. *Shuleykin V.N., Shchukin G.G., Kupovykh G.V.* Razvitie metodov i sredstv prikladnoy geofiziki – atmosferno-elektricheskiy monitoring geologicheskikh neodnorodnostey i zon geodinamicheskikh protsessov [Development of methods and means of applied geophysics - atmospheric-electric monitoring of geological heterogeneities and zones of geodynamic processes]. Saint Petersburg: RGGMU, 2015, 206 p.
6. *Adzhiev A.Kh., Klovo A.G., Kudrinskaya T.V., Kupovykh G.V., Timoshenko D.V.* Sutochnye variatsii elektricheskogo polya v prizemnom sloe atmosfery [Daily variations of the electric field in the surface layer of the atmosphere], *Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana* [Izvestia RAS. Physics of the atmosphere and ocean], 2021, Vol. 57, No. 4, pp. 452-461.

7. Kupovykh G.V., Belousova O.V., Timoshenko D.V., Klovo A.G., Kudrinskaya T.V. Elektrodynamiceskaya model' turbulentno-konvektivnogo prizemnogo sloya: priblizhennyye analiticheskiye resheniya [Electrodynamic model of the turbulent-convective surface layer: approximate analytical solutions], *Mater. IX Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii po atmosfernomu elektrichestvu* [Materials of the IX All-Russian Scientific Conference on Atmospheric Electricity], Saint Petersburg: VKA im. A.F. Mozhayskogo, 2023, pp. 488-496.
8. Belousova O.V., Timoshenko D.V., Kupovykh G.V. Matematicheskoe modelirovaniye elektricheskoy struktury turbulentno-konvektivnogo prizemnogo sloya [Mathematical modeling of the electrical structure of the turbulent-convective surface layer], *Radiotekhnicheskiye i telekommunikatsionnyye sistemy* [Radio engineering and telecommunication systems], 2023, No. 3 (51), pp. 12-19.
9. Kupovykh G.V., Timoshenko D.V., Klovo A.G., Kudrinskaya T.V. Vliyaniye elektrodnoy efekta na sutochnyye variatsii elektricheskogo polya atmosfery v prizemnom sloe [Influence of the electrode effect on daily variations of the atmospheric electric field in the surface layer], *Optika atmosfery i okeana* [Optics of the atmosphere and ocean], 2023, Vol. 36, No. 10, pp. 834-838.
10. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1972, 736 p.
11. Mikhlin S.G. Variatsionnyye metody v matematicheskoy fizike [Variational methods in mathematical physics]. Moscow: Gostekhizdat, 1957, 450 p.
12. Williams E.R., Mareev E.A. Recent progress on the global electrical circuit, *Atmos. Res.*, 2014, Vol. 135–136, pp. 208-227.
13. Liu C., Williams E.R., Zipser E.J., Burns G. Diurnal variation of global thunderstorms and electrified shower clouds and their contribution to the global electrical circuit, *J. Atmos. Sci.*, 2010, Vol. 67, No. 2, pp. 309-323.
14. Mach D.M., Blakeslee R.J., Bateman M.G. Global electric circuit implications of combined aircraft storm electric current measurements and satellite-based diurnal lightning statistics, *J. Geophys. Res.*, 2011, Vol. 59, No. 1, pp. 183-204.
15. Harrison R.G. The Carnegie curve, *Surveys in Geophysics*, 2013, 34 (2), pp. 209-232.
16. Kupovykh G.V., Timoshenko D.V., Klovo A.G., Kudrinskaya T.V. Electrodynamic processes models in atmospheric surface layer, *CATPID-2019. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2019, Vol. 698 (4), pp. 44034.
17. Kupovykh G., Klovo A., Timoshenko D. The atmospheric electric field variations in the surface layer, *Russian Open Conference on Radio Wave Propagation (RWP). 1-6 July 2019*. Publisher: IEEE, 2019, pp. 580-583.
18. Kupovykh G.V., Timoshenko D.V., Kudrinskaya T.V., Klovo A.G. Modeling of the atmospheric electric field local variations in the turbulent surface layer, *Journal of Physics: IOP Conference Series. VIII All-Russian Conference on Atmospheric Electricity*, 2020, Vol. 1604 (1), pp. 012003.
19. Hoppel W.A. Theory of the electrode effect, *Journal Atmospheric and Terrestrial Physics*, 1967, Vol. 29, No. 6, pp. 709-721.
20. Evtushenko A.A., Mareev E.A. On the generation of charge layers in MCS stratiform regions, *Atmospheric Research*, 2009, Vol. 91, pp. 272-280.
21. Kudrinskaya T.V., Klovo A. G., Kupovykh G.V., Timoshenko D.V. Reduction coefficient and electric field near plane electrode with geometric heterogeneity, *Journal of Physics: IOP Conf. Series. VIII All-Russian Conference on Atmospheric Electricity*, 2020, Vol. 1604 (1), pp. 012005.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор Г.В. Куповых.

Тимошенко Дмитрий Владимирович – Южный федеральный университет; e-mail: dmitrytim@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +78634371705; кафедра физико-математических основ инженерного образования; к.ф.-м.н.; доцент.

Timoshenko Dmitry Vladimirovich – Southern Federal University; e-mail: dmitrytim@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +78634371705; the department of physical and mathematical foundations of engineering education; cand. of phys. and math. sc.; associate professor.