Krivsha Natalya Sergeevna – Southern Federal University; e-mail: natalie-home@yandex.ru; Taganrog, Russia; phone: +79185456456; cand. of eng. sc.; associate professor.

Krivsha Vitalij Vladimirovich – e-mail: kvit_ok@mail.ru; phone: +79281339489; cand. of eng. sc.; associate professor.

Butenkov Sergey Andreevich – Impuls Pyatigorsk Enterprise Company; e-mail: saabmount@gmail.com; Pyatigorsk, Russia; phone: +79281420088; cand. of eng. sc.; associate professor; senior researcher.

УДК 519.6 DOI 10.18522/2311-3103-2023-6-76-88

А.М. Макаров, А.С. Ермаков

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОПЕРАТОРОВ МЕЛЛИНА И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

В развитие теории и ее приложений для обработки процессов, несущих информацию, важную роль сыграли интегральные преобразования. Математически интегральные преобразования осуществляют отображение пространства исходной переменной в новое пространство новой переменной, то есть осуществляют отображение множеств элементов пространства типа «много в одно». В теории сигналов широкое применение получило интегральное преобразование Фурье не только как представление сигналов, но и в их спектральном анализе. Интегральное преобразование Гильберта послужило в качестве развитие теории цифрового представления широкополосных сигналов. В работе рассматриваются вопросы теории интегрального преобразования Меллина не так известного, как предыдущие, для его использования при обработке сигналов, помех и некоторых задач, имеющих прикладной характер в теории сигналов. Приводится теория спектрально-корреляционного анализа случайных процессов в базисе интегрального преобразования Меллина. В частности, на ее основе доказана теорема (аналог теоремы Винера-Хинчина для преобразования Фурье) о связи корреляционной функции шума в базисе преобразования Фурье со спектральной плотностью мощности шума в базисе преобразования Меллина. Эти результаты могу быть положены в основу синтеза алгоритмов обработки сигналов на фоне помех в базисе интегрального преобразования Меллина. На его основе разработана функциональная структура обнаружителя сигналов на фоне гауссовых шумов с неизвестными априори корреляционной функцией и длительностью сигнала. Следует отметить, что в работе авторов рассмотрены довольно сложные математические выкладки. Начинающим знакомится с интегральным преобразованием Меллина рекомендуем в первую очередь изучить учебное пособие.

Преобразования Меллина; теория операторов; цифровая обработка сигналов.

A.M. Makarov, A.S. Ermakov

INTRODUCTION TO MELLIN OPERATOR THEORY AND SOME OF ITS APPLICATIONS IN SIGNAL PROCESSING

Integral transformations have played an important role in the development of the theory and its applications for processing information-bearing processes. Mathematically, integral transformations map the space of the original variable into a new space of a new variable, that is, they map sets of elements of the space of the "many into one" type. In signal theory, the integral Fourier transform has been widely used not only as a representation of signals, but also in their spectral analysis. The Hilbert integral transformation served as a development of the theory of digital representation of broadband signals. The paper discusses the theory of the integral Mellin transform, which is not as well known as the previous ones, for its use in signal processing and interference, as well as some problems of an applied nature in signal theory. We presented the theory of spectral correlation analysis of random processes in the basis of the integral Mellin transform. In par-

ticular, a theorem (analogous to the Wiener-Hinchin theorem for the Fourier transform) is proved on its basis on the relationship of the correlation function of noise in the basis of the Fourier transform with the spectral density of noise power in the basis of the Mellin transform. These results can be used as the basis for the synthesis of signal processing algorithms against interference in the basis of the integral Mellin transform. Based on it, the functional structure of the signal detector has been developed against the background of Gaussian noise with unknown a priori correlation function and signal duration. It should be noted that the authors' work considers rather complex mathematical calculations. For beginners who get acquainted with the integral Mellin transformation, we recommend that you first familiarize yourself with the textbook.

Mellin transforms; operator theory; digital signal processing.

Введение. Важную роль в различных приложениях сыграли разные интегральные преобразования, например, Фурье, Гильберта и Меллина [2–11].

Важную роль в теории цифрового представления информации сыграло преобразование Гильберта, позволившее распространить цифровую обработку на широкополосные сигналы.

Известно применение интегрального преобразования Меллина, обеспечивающее масштабную инвариантность порогов решающих правил к масштабным изменениям анализируемых сигналов [12]. Следует отметить, что преобразование Меллина уже получило отражение в работе [1] в качестве учебного пособия для обучения студентов.

Весьма интересно отметить применение теории интегрального преобразования Меллина в физических приложениях. Особый интерес представляет теория решения интегральных уравнений Фредгольма на основе мультипликативной характеристической функции, порождаемой интегральным преобразованием Меллина. В работе приведена основная теорема о равенстве Парсеваля, позволяющая применять интегральное преобразование Меллина в приложениях обработки сигналов. Приводится теория спектрально-корреляционного анализа случайных процессов в базисе интегрального преобразования Меллина [13], в частности, на ее основе доказана теорема (аналог теоремы Винера-Хинчина для преобразования Фурье), результаты которой приводят к осуществлению процедуры синтеза оптимального приемника сигналов на фоне неизвестной корреляционной функции шума [14]. На его основе разработана функциональная структура обнаружителя сигналов на фоне гауссовых шумов с неизвестными априори корреляционной функцией и длительностью сигнала.

Разработана теория операторов, порождаемых сверткой Меллина, позволяющая решать широкий класс дифференциальных уравнений Фредгольма второго рода, и, что особенно важно, находить пары ядер взаимно обратимых интегральных преобразований по заданному одному из ядер.

Как показывают результаты исследований, которые приведены в статье, преобразование Меллина прошло путь от математической теории до разработки ее конкретных приложений. В этом направлении авторами статьи разработана теория параметрически периодических тригонометрически-логарифмических функций. Полученные результаты позволяют поставить задачу создания цифровой модели реализации преобразования Меллина как единого модуля в виде отдельной вычислительной процедуры.

Целью представления работы является некоторое подведение итогов работы авторов в области развития методов и приложений теории интегрального преобразования Меллина к обработке сигналов на фоне помех, что и обусловило использование некоторого учебного стиля изложения материала. Мы посчитали это возможным для ознакомления с основами преобразования Меллина начинающих молодых ученых, аспирантов и магистров технических специальностей.

1. Определения и равенство Парсеваля. Приведем определение понятия о тригонометрически-логарифмических функциях. Под ними понимаются функции, порождаемые ядрами интегрального преобразования Меллина.

$$K_{er} = x^{S-1}, \qquad x \in (0;\infty); \qquad S = \delta + ju;$$

$$\delta \in (\delta_1, \delta_2) - \text{кольцо сходимости интеграла};$$

$$u \in (-\infty;\infty).$$

или

$$x^S = x^{\delta+ju} = x^{\delta}e^{ju\ln x} = x^{\delta}(\cos u\ln x + j\sin u\ln x), \text{причем } \infty > x > 0.$$

Основное свойство этих функций при их применении в качестве ядер интегральных преобразований – масштабная инвариантность модуля образа преобразования. Этим свойством обладает интегральное преобразование Меллина. Тригонометрически-логарифмические функции его ядра являются параметрическими и периодическими с периодом, равным $e^{2\pi n}$, $n = 0,1,2,\ldots$

Теорема: Пусть $t^{k-1}f(t) \in L(0,\infty]$ в некоторой окрестности $(x-\sigma, x+\sigma)$ точки $t = x > 0$ имеем ограниченное изменение. Если $\sigma = \frac{1}{2}$, то будет выполняться равенство Парсеваля, если $\sigma > \frac{1}{2}$, то неравенство Бесселя ($\sigma_1 < \sigma \le \sigma_2$, область сходимости преобразования Меллина).

Для математических приложений значение σ определяет область сходимости интеграла преобразования Меллина. В обработке сигналов основополагающим является выполнение равенства Парсеваля, то есть выполнение закона о сохранении энергии сигнала до преобразования и после преобразования.

Доказательство:

Запишем выражение квадрат модуля

$$[\![M(S)]\!]^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{s-1} \cdot t_1^{s^*-1} f(t_1)f(t_2)dt_1dt_2, \tag{1}$$

где $*$ −знак комплексно-сопряженной величины;

$$f(t_1), f(t_2) \in L(0,\infty].$$

Тогда энергия f(t) равна

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\![M(S)]\!]^2\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{s-1} \cdot t_1^{s^*-1} f(t_1)f(t_2)dt_1dt_2ds = \int_0^\infty f^2(t)dt. \tag{2}$$

Пусть

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^\infty t_1^{s-1}t_1^{s^*-1}f(t_1)f(t_2)dt_1\right]ds = f(t_2).$$

Полагая, что условия перемены порядка интегрирования выполняются, имеем

$$\Psi(t_1,t_2)f(t_1)dt_1 = f(t_2), \tag{3}$$

$$\int \Psi(t_1,t_2)dt_1 = \int_0^\infty t_1^{s-1}\, t_2^{s^*-1}ds = 2\pi j t_1^{\sigma-1}\int_0^\infty t_1^{\sigma-1}\, f(t_1)\delta(lnt_1 - lnt_2)dt_1,$$

где δ – дельта функция.

Сделав замену переменной $t_1 = e^{alnt}$, получим равенство,

$$2\pi j t_2^{2\sigma-1}f(t_2) = f(t_2), \tag{4}$$

которое выполняется при $\sigma = \frac{1}{2}$. Теорема доказана.

2. Введение в теорию операторов, порождаемых интегральным преобразованием Меллина. Важной особенностью ПМ является то, что, следуя теореме Слейтер, интегралы, принадлежащие классу гамма-функций и гипергеометрических функций, представляются в виде интегралов Меллина-Барнса, подлежат регулярному обратному преобразованию Меллина на основе регулярной теоремы Слейтер. В следствии чего целесообразно разработать основы теории операторов, применяя которые для упрощения решения задач, имеет возможность находить оригинал по его образу.

На основе результатов работ [2, 3, 4, 6] получены основные соотношения для операторов:

$$M(x;\nu) = \int_0^\infty x\,(t)t^{\nu-1}dt, \tag{5}$$

$$M(u;\nu) = \int_0^\infty u\,(t)t^{\nu-1}dt, \tag{6}$$

которые порождают ряд важных равенств и широко используются в дальнейших приложениях преобразования Меллина.

По аналогии с [2] рассмотрим интегральные преобразования ядер, зависящих от произведения аргументов

$$x(t) = \int_0^\infty u\,(s)\varphi(st)ds, t \geq 0, \tag{7}$$

$$u(s) = \int_0^\infty x\,(t)\theta(st)dt, s \geq 0. \tag{8}$$

Вычислим от (7) преобразование Меллина

$$M(x;\nu) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty u\,(s)\varphi(st)\right) t^{\varphi-\alpha}dtds.$$

Сделав замену переменной y=st, после несложных преобразований получим

$$M(x;\nu) = \int_0^\infty u\,(s)s^{-\nu}ds \int_0^\infty \varphi\,(y)y^{\nu-1}dy = M(u;1-\nu)M(\varphi;\nu),$$

где

$$M(u;1-\nu) = \int_0^\infty u\,(s)s^{-\nu}ds. \tag{9}$$

Введя в (9) новую переменную $1-\nu = p$, получим

$$M(u;1-\nu) = \int_0^\infty u\,(s)s^{p-1}ds = M(u;p) \tag{10}$$

с учетом $-\nu = p-1$ имеем равенство (9).

Из (9) и (10) следует дуальность преобразования операторов M(.;.), которая сохраняет равенство

$$M(u;1-\nu)M(\varphi;\nu) = M(\varphi;1-\nu)M(u;\nu). \tag{11}$$

Это свойство играет важную роль во многих приложениях работ [3, 5, 8].

Аналогично, вышеприведенному выводу, вычислим от (8) преобразование Меллина и получим:

$$\int_0^\infty u\,(s)s^{\nu-1}ds = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x\,(t)\theta(st)\right) s^{\nu-1}dsdt = M(x;1-\nu)M(\theta;\nu). \tag{12}$$

Тогда из равенства (11) имеем следующее равенство

$$M(x;1-\nu)M(\theta;\nu) = M(\theta;1-\nu)M(x;\theta). \tag{13}$$

Таким образом, получаем следующие операторные соотношения:

$$M(x;\nu) = M(u;1-\nu)M(\varphi;\nu), \tag{14}$$

$$M(x;1-\nu) = M(u;\nu)M(\varphi;1-\nu), \tag{15}$$

$$M(u;\nu) = M(x;1-\nu)M(\theta;\nu)\,, \tag{16}$$

$$M(u;1-\nu) = M(x;\nu)M(\theta;1-\nu). \tag{17}$$

Далее, из (14) найдем

$$M(\varphi;\nu) = M\,(x;\nu)/M\,(u;1-\nu)\,. \tag{18}$$

Из (17) запишем

$$M(\theta;1-\nu) = M\,(u;1-\nu)/M\,(x;\nu). \tag{19}$$

На основе (18) и (19) имеем важное равенство, которое используется при решении уравнений Фредгольма второго рода

$$M(\varphi;\nu)M(\theta;1-\nu) = \frac{M(x;\nu)M(u;1-\nu)}{M(u;1-\nu)M(x;\nu)} = 1. \tag{20}$$

На основе свойства дуальности равенство (20) запишется в виде

$$M(\theta;\nu)M(\varphi;1-\nu) = 1. \tag{21}$$

Объединяя (20) и (21), получим следующее равенство

$$\frac{M(\varphi;\nu)M(\theta;1-\nu)}{M(\theta;\nu)M(\varphi;-1\nu)} = 1. \tag{22}$$

Вводя оператор обратного преобразования Меллина

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} M\,(\nu)t^{-\nu}d\nu = M^{-1}(x;\nu) \tag{23}$$

из (20) имеем

$$M(\phi;\nu) = \frac{1}{M(\theta;1-\nu)},$$

или

$$M^{-1}\big(M(\varphi;\nu)\big) = M^{-1}\big(1/M\,(\theta;1-\nu)\big),$$

или

$$\varphi(\nu) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{t^{-\nu}}{M(\theta;1-\nu)}d\nu\,. \tag{24}$$

Аналогично для

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{t^{-\nu}}{M(\varphi;1-\nu)}d\nu\,. \tag{25}$$

Из (24) и (25) получаем интегральное решение, в котором находят сопряженные ядра новых интегральных преобразований. Примеры решения-
приведены в 4 разделе статьи.

III. Метод решения операторного уравнения Фредгольма. Известно применение свойств мультипликативной свертки, порождаемой преобразованием Меллина, для решения линейных интегральных уравнений второго рода (интегральные уравнения (ИУ) Фредгольма) [15, 16]. Анализ его решения показал, что применение этих методов в классе тригонометрически-логарифмических функций недостаточно исследованы.

Рассмотрим особенности обобщение решения интегрального уравнения Фредгольма на класс тригонометрически-логарифмических функций для расширения области применения и способов обращения результата в область переменной времени. Следуя работе [8], под интегральным уравнением будем понимать уравнение вида:

$$\left(F\left(x, \varphi(x)\right), \int_a^b k(x \oplus y), \varphi(y) dy\right) = 0, \tag{26}$$

где $\varphi(y)$ – неизвестная функция, подлежащая вычислению;

$\oplus$ – знак композиции x и y;

$k(x \oplus y)$ – ядро интегрального преобразования, которое в общем случае является комплексной функцией.

Интегральное уравнение Фредгольма запишется так:

$$k(x) \cdot \varphi(x) + f(x) = \int_a^b k(x \oplus y) \cdot \varphi(y) \frac{dy}{y}, \tag{27}$$

В данной работе рассмотрены уравнения, при которых x и y взаимодействуют в виде частного $\frac{x}{y}$ и произведения $x \cdot y$; a=0, b=∞; $k(x) = x^{\nu-1}$, тогда

$$x^{\nu-1}\, \varphi(x) + f(x) = \int_0^\infty k(x/y) y^{\nu-1}\, \varphi(y) \frac{dy}{y}, \tag{28}$$

$$x^{\nu-1}\, \varphi(x) + f(x) = \int_0^\infty k(x \cdot y) y^{\nu-1} \frac{\varphi(y)}{y} dy. \tag{29}$$

Рассмотрим метод решения (28):
взяв преобразование Меллина от левой и правой части

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} \varphi(x) x^{S-1} dx + \int_0^\infty f(x) x^{S-1} dx = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty k(x/y) y^{\nu-1} \frac{\varphi(y)}{y} dy\right] x^{S-1} dx,$$

получим:

$$M_1(S + \nu - 1) + M_2(S) = M_3(S) M_1(S + \nu - 1), \tag{30}$$

где $M_1(S + \nu - 1) = \int_0^\infty x^{\nu-1} \varphi(x) x^{S-1} dx$,

$$M_2(S) = \int_0^\infty f(x) x^{S-1} dx;$$

$$M_3(S) = \int_0^\infty k(x) x^{S-1} dx.$$

Отсюда решение (30) равно

$$M_1(S + \nu - 1) = \frac{M_2(S)}{1 - M_3(S)}, \tag{31}$$

Искомое решение для (28) запишется в виде обратного преобразования Меллина от (31)

$$x^{\nu-1}\, \varphi(x) = \frac{1}{2\pi j}. \tag{32}$$

Аналогично получим решение для (28)

$$x^{\nu-1} \varphi(x) + f(x) = \int_0^\infty k(xy) x^{\nu-1} \varphi(y) dy,$$

где $M_3(S) = \int_0^\infty k(x) x^{S-1} dx$.

Тогда решение в пространстве переменной S запишется как:

$$M_1(S+\nu-1)=\frac{M_2(S)+M_2(1-S)\cdot M_3(S)}{1-M_3(S)M_3(1-S)}, \tag{33}$$

А решение интегрального уравнения в пространстве переменной x равно:

$$x^{\nu-1}\,\varphi(x)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{M_2(S)+M_2(1-S)M_3(S)}{1-M_3(S)M_3(1-S)}x^{-S}dS. \tag{34}$$

Полученные соотношения для решения интегральных уравнений (31) и (32) верны в классе тригонометрически-логарифмических функций вида:

$$x^{\nu-1}\,\varphi(x)=x^{\delta-1}(\cos u\ln x+j\sin u\ln x)\varphi(x)=x^{\delta-1}\,\varphi(x)(\cos u\ln x+j\sin u\ln x).$$

Для такого класса функций лучше всего подходит уравнения свертки:

$$\int_0^\infty k(x)k({}^{y}\!/_{x})\frac{dx}{x}=M_1(S)M_2(S). \tag{35}$$

Свертка (35) порождена интегральным преобразованием Меллина. Для этого преобразования имеются обширные таблицы [4, 6, 7], что позволяет решить интегральные уравнения в пространстве новой переменной S. Но во всех методах операторного решения интегральных уравнений, как и методы, основанные на интегральном преобразовании Лапласа, обладают одной весьма трудоемкой операцией: обращением этого решения с помощью обратного преобразования. Такого рода операция является крайне нетривиальной. В большой мере это касается операции обратного преобразования Меллина. В работе используются методы обращения, основанные на теории вычетов: контура Бромвича и интеграла Бромвича-Вагнера, а также теоремы Слейтер.

4. Нахождение ядер пар интегральных преобразований в базисе Меллина. Пусть заданы два интегральных преобразования функций $x(t)$ и $U(S)$, имеющие ядра вида $\varphi(St)$ – прямое интегральное преобразование и $\theta(St)$ – обратное интегральное преобразование.

$$x(t)=\int_0^\infty U(S)\varphi(St)dS, \tag{36}$$

$$U(S)=\int_0^\infty x(t)\theta(St)dt. \tag{37}$$

Для нахождения ядра интегрального преобразования с известным ядром $\varphi(St)$ обратным к $\varphi(St)$, т.е. в (37) это $\theta(St)$, необходимо решить интегральное уравнение вида:

$$\theta(Z)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{Z^{-\nu}}{M(\varphi,1-\nu)}d\nu, \tag{38}$$

где $\nu=\delta+ju$;

$M(\varphi,1-\nu)$ – прямое преобразование Меллина от известного априори ядра $\varphi(St)$. Уравнение (38) было получено Л. Френкс в [3]. В работах автора это соотношение получило полное доказательство и математическое обоснование.

Для внесения конкретности рассмотрим примеры:

Пример 1.

Пусть задано ядро $\varphi(x)=(\lambda-x)^{-1},\ \lambda<0; x\in(0,\infty)$.

Тогда преобразование Меллина равно

$$M(\varphi,p)=\pi\lambda^{p-1}\cot\pi p,\quad 0<R_e p<1,$$

Из (25) получим:

$$\theta(Z) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\sin(\pi(1-\nu))}{\pi\lambda^{-\nu}\cos(\pi(1-\nu))} Z^{-\nu} d\nu\,.$$

Вычислить интеграл возможно на основе контура интеграла Бромвича-Вагнера, т.е.

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(\nu) Z^{-\nu} d\nu = \sum_{k=1}^{n} R_{eS}[Z^{-\nu} f(\nu)],$$

где оператор R_{eS} означает вычет функции $Z^{-\nu}f(\nu)$.

После несложных преобразований получаем

$$R_{es} = \frac{p^{-(1/_2+k)}\sin\pi(\frac{1}{2}+k)}{\pi\sin\pi(1/_2+k)} = \frac{1}{\pi}\lambda^{\frac{1}{2}+k} Z^{-(\frac{1}{2}+k)},$$

k=0, 1, 2,..m.

Таким образом, искомое ядро интегрального уравнения имеет вид

$$\theta(Z) = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}+k}}{\pi} Z^{-(\frac{1}{2}+k)}.$$

Пример 2.

Пусть задана функция

$$\varphi(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$$

для нее преобразование Меллина получим как

$$M(\varphi, S) = \frac{\pi\tan(\pi\frac{S}{2})}{S},$$

Тогда

$$\theta(Z) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{1-\nu}{\pi\cot\pi\frac{\nu}{2}} Z^{-\nu} d\nu,$$

Или перепишем в развернутом виде

$$\theta(Z) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{(1-\nu)\sin\pi\frac{\nu}{2}}{\pi\cos\pi\frac{\nu}{2}} Z^{-\nu} d\nu,$$

Тогда

$$\theta(Z) = R_{eS}\left[\frac{Z^{-\nu}(1-\nu)\sin\pi\frac{\nu}{2}}{\pi\cos\pi\frac{\nu}{2}}\right]$$

или после взятия вычетов имеем:

$$\theta(Z) = \frac{4k}{\pi^2} Z^{-(\frac{1}{2}+k)},\ \ k = 0,1,2,\ldots,m\,.$$

Приведенные примеры показывают возможность нахождения ядер пар интегральных преобразований по алгоритму: задавая вид ядра прямого преобразования, найти ему соответствующее ядро обратного интегрального преобразования. То есть такой подход позволяет расширить класс интегральных преобразований для различных классов их ядер.

5. Спектрально-корреляционный анализ случайных процессов в базисе преобразований Меллина. Решение задачи синтеза оптимального обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной формой корреляционной функции рассматривалось в работах [3]. В результате проведенных исследований ее удалось решить с использованием методов оценки корреляционной функции или ее спектральной плотности мощности, что, естественно, не позволяет работать в реальном масштабе времени.

С появлением в современных системах связи широкополосных сигналов не удается привести спектральную плотность мощности шума к постоянной величине в полосе пропускания сигнала. Актуальность решения такой задачи увеличивается с появлением широкого класса сигналов со скачками частоты в современных системах обработки информации. Как показано в работах [1, 14] решение возможно в базисе интегрального преобразования Меллина. Показано, что в этом базисе при интервале корреляции, намного меньшим длительности анализируемой выборки, спектральная плотность мощности имеет вид:

$$P(u) = \int_0^\infty B(\tau)d\tau \int_0^\infty \frac{\cos(uy)}{ch(y/2)}d\gamma, \tag{39}$$

где $B(\tau)$ – автокорреляционная функция шума.

На основе теоремы Винера-Хинчина для корреляционной функции имеем:

$$R(y) = \frac{\tau_k \sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(yt)}{ch(\pi t)} dt = \frac{\pi \tau_k \sigma}{ch\left(\frac{y}{2}\right)}, \tag{40}$$

где σ – среднеквадратичное отклонение шума;

τ_k – интервал корреляции шума.

Из выражения (40) следует, что корреляционная функция шума поле преобразования Меллина инвариантна к виду исходной корреляционной функции шума.

6. Согласованный фильтр в условии априорной неопределенности о корреляционной функции шума. Для синтеза квазиоптимального согласованного фильтра по критерию максимума отношения сигнал/шум по выходу воспользуемся методом приведения шума произвольной КФ к «белому» шуму.

Структурную схему представим в виде [14, 15]:

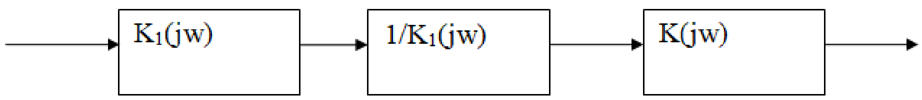

Рис. 1. Квазиоптимальный фильтр для обнаружения сигнала при произвольной КФ шума

$$P(t) = S(t) \to S(\omega);\ h(t) \to W(\omega);$$

$$y(u) \to S(f);\ h(u) \to W(f)$$

где $S(\omega)$ – спектральная плотность шума $S(u)$на входе;

$W(\omega)$ – спектральная плотность мощности шума $S(u)$на входе;

$S(f)$ – спектральная плоскость сигнала $S(f)$ после интегрального ПМ

$W(f)$ – спектральная плотность мощности шума после интегрального преобразования Меллина.

Следуя работе [3] передаточную функцию квазиоптимального фильтра получим:

$$K(jf)_{opt} = k_0 \cdot \frac{S*(f)}{W(f)} \cdot e^{-jft_0}, \tag{41}$$

где t_0 – время отсчета отклика на выходе согласованного фильтра.

k_0 – постоянная величина.

На рис. 2 приведена реализация определения модуля преобразования Меллина входной смеси сигнала и помехи.

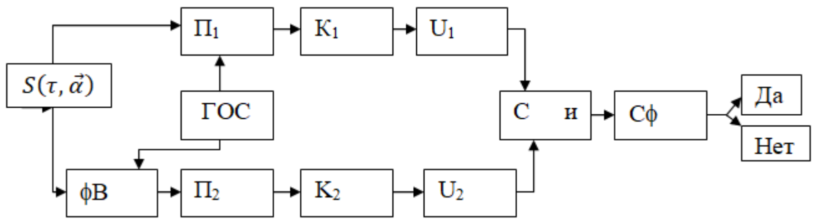

Рис. 2. Структурная схема обнаружителя квазидетерминированного сигнала в пространстве преобразования Меллина

где фВ – фазовращатель на $\frac{\pi}{2}$;

ГОС – генератор опорного сигнала вида $\frac{\cos u \ln x}{\sqrt{x}}$ или $\frac{\sin u \ln x}{\sqrt{x}}$;

$П_1$, $П_2$ – первый и второй перемножители опорных сигналов и сигналов ГОС;

$К_1$, $К_2$ – первый и второй квадраторы;

U_1, U_2 – первый и второй интеграторы;

С и УИК – сумматор и устройство извлечения корня квадратного;

Сф – согласованный фильтр в пространстве переменной интегрального преобразования Меллина.

Итоги и пути дальнейших исследований. Как показывают результаты исследований, которые приведены в статье, преобразование Меллина прошло путь от математической теории до разработки ее конкретных приложений. К задаче, которая должна решаться в дальнейшем, относится создание цифровой модели интегрального преобразования Меллина [16–19] с ядрами, для которых требуется шаг дискретизации порядка аттосекунды. И даже, возможно, опуститься до стотысячной доли аттосекунды, что приведет к расширениям круга решаемых прикладных задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Клименко П.П., Корниенко В.Т., Макаров А.М., Геложе Ю.А., Максимов А.В.* Прикладные методы цифровой обработки сигналов в радиотехнических системах. – Ростов-на-Дону; Таганрог, 2021.
2. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области. – М.: Изд-во «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1965.
3. *Френкс Л.* Теория сигналов. Нью-Джерси, 1969 г.: пер. с англ. / под ред. Д.Е. Вакмана. – М.: Сов. радио, 1974. – 344 с.
4. Fritz Jberhettinger Tabels of Mellin Transforms. – Springer-verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

5. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Интегральные уравнении: Задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие. – 3-е изд. испр. – М.: УРСС, 2003. – 192 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. – М.: Изд-во «Наука», 1965.
7. *Bertrand J., Bertrand P., Ovarlez j.* The Mellin Transform. The Transformsand Applications Handbook. – Second ed. / Ed. Alexander D. Poularikas. – Boca Raton: CRCPress LLC, 2000.
8. *Шапиро Д.А.* Уравнения в частных производных. Специальные функции. Асимптотики. Конспект лекций по математическим методам физики. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2004. – 122 с.
9. *Philip E. Zwiche.* A new implementation of the radar classification of ships // IEEE Trans. of Pattern analysis and machine Intellecenzy. – March 1983. – Vol. PAMI-5, No. 2.
10. *Sheng Y., Arsenault H.* Experiments on pattern recognition using invariant Fourier-Mellin descriptors // J. Opt. Soc. Am. – 1986. – No. 3 (6). – P. 885-887.
11. *Reddy S., Chatterji B.* Техника на основе FFT для преобразования, вращения и масштабирования инвариантного изображения. Регистрация // IEEE Trans. об обработке изображений. – 1996. –Т. 5. – С. 126-127.
12. *Zalubas E.J., Williams W.J.* Discrete scale transform for signal analysis // Proceedings of the 20th IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '95), May 1995, Detroit, Mich, USA 3. – P. 1557-1560.
13. *Макаров А.М.* Взаимосвязь автокорреляционной функции стационарных случайных процессов в базисе преобразования Фурье со спектральной плотностью мощности в базисе преобразования Меллина (аналог теоремы Винера-Хинчина) // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. – № 11 (160). – С. 52.
14. *Макаров А.М., Ермаков А.С.* Оптимальный согласованный фильтр для обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной корреляционной функцией // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – № 11 (172). – С. 42-55.
15. *Makarov A.M., Ermakov A.S.* Method development for solving Fredholm integral equations of the second kind based on the Mellin multiplicative convolution in the class of trigonometric-logarithmic functions // Conference Proceedings - 2021 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves, RSEMW 2021. – 2021. – P. 71-74.
16. *Макаров А.М., Постовалов С.С.* Введение в теорию операторов, порождаемых интегральным преобразованием Меллина // Компьютерные и информационные технологии в науке, инженерии и управлении "КомТех-2019": Сб. материалов Всероссийской научно-технической конференции с международным участием. – Ростов-на-Дону – Таганрог, 2019. – С. 34-39.
17. *De Sena A, Rocchesso D.* A fast Mellin transform with applications in DAFx. Proceedings of the 7th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx '04), October 2004, Napoli, Italy. – P. 65-69.
18. *Макаров А.М., Постовалов С.С.* Математическая модель тригонометрически-логарифмических базисных функций преобразования Меллина и их цифровая реализация // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2018. – № 3 (197). – С. 22-33.
19. *Makarov A.M., Postovalov S.S., Ermakov A.S.* Application of integral transforms in algorithms for detecting signals against a background of noise under priori uncertainty using the Mellin's transforms // 2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies, FarEastCon 2020. – 2020. – P. 927137.
20. *Постовалов С.С., Макаров А.М.* Результаты исследования точности представления параметрически периодических нестационарных функций ядра интегрального преобразования Меллина // Университетские чтения – 2020: Матер. научно-методических чтений ПГУ. – Пятигорск, 2020. – С. 22-46.

REFERENCES

1. *Klimenko P.P., Kornienko V.T., Makarov A.M., Gelozhe Yu.A., Maksimov A.V.* Prikladnye metody tsifrovoy obrabotki signalov v radiotekhnicheskikh sistemakh [Applied methods of digital signal processing in radio systems]. Rostov-on-Don; Taganrog, 2021.
2. *Dzhrbashyan M.M.* Integral'nye preobrazovaniya i predstavlenie funktsiy v kompleksnoy oblasti [Integral transformations and representation of functions in the complex domain]. Moscow: Izd-vo «Nauka». Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1965.

3. *Frenks L.* Teoriya signalov. N'yu-Dzhersi, 1969 g. [Signal theory. New Jersey, 1969]: transl. from english, ed. by D.E. Vakmana. Moscow: Sov. radio, 1974, 344 p.
4. Fritz Jberhettinger Tabels of Mellin Transforms. Springer-verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
5. *Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko G.I.* Interral'nye uravnenii: Zadachi i primery s podrobnymi resheniyami: ucheb. posobie [Interactive equations: Problems and examples with detailed solutions: textbook]. 3rd ed. Moscow: URSS, 2003, 192 p.
6. *Beytmen G., Erdeyi A.* Tablitsy integral'nykh preobrazovaniy. T. 1. Preobrazovanie Fur'e, Laplasa, Mellina [Tables of integral transformations. Vol. 1. Fourier, Laplace, Mellin transform]. Moscow: Izd-vo «Nauka», 1965.
7. *Bertrand J., Bertrand P., Ovarlez j.* The Mellin Transform. The Transformsand Applications Handbook. Second ed. Ed. Alexander D. Poularikas. Boca Raton: CRCPress LLC, 2000.
8. Shapiro D.A. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh. Spetsial'nye funktsii. Asimptotiki. Konspekt lektsiy po matematicheskim metodam fiziki [Partial differential equations. Special functions. Asymptotics. Lecture notes on mathematical methods of physics]. Novosibirsk: Novosibirskiy gosudarstvennyy universitet, 2004, 122 p.
9. *Philip E. Zwiche.* A new implementation of the radar classification of ships, *IEEE Trans. of Pattern analysis and machine Intellecenzy,* March 1983, Vol. PAMI-5, No. 2.
10. *Sheng Y., Arsenault H.* Experiments on pattern recognition using invariant Fourier-Mellin descriptors, *J. Opt. Soc. Am*., 1986, No. 3 (6), pp. 885-887.
11. *Reddy S., Chatterji B.* Tekhnika na osnove FFT dlya preobrazovaniya, vrashcheniya i masshtabirovaniya invariantnogo izobrazheniya. Registratsiya [FFT based technique for invariant image transformation, rotation and scaling. Registration], *IEEE Trans. ob obrabotke izobrazheniy* [EEE Trans. about image processing], 1996, Vol. 5, pp. 126-127.
12. *Zalubas E.J., Williams W.J.* Discrete scale transform for signal analysis, *Proceedings of the 20th IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '95), May 1995, Detroit, Mich, USA 3,* pp. 1557-1560.
13. *Makarov A.M.* Vzaimosvyaz' avtokorrelyatsionnoy funktsii statsionarnykh sluchaynykh protsessov v bazise preobrazovaniya Fur'e so spektral'noy plotnost'yu moshchnosti v bazise preobrazovaniya Mellina (analog teoremy Vinera-Khinchina) [Relationship between the autocorrelation function of stationary random processes in the basis of the Fourier transform and the power spectral density in the basis of the Mellin transform (analogue of the Wiener-Khinchin theorem)], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2014, No. 11 (160), pp. 52.
14. *Makarov A.M., Ermakov A.S.* Optimal'nyy soglasovannyy fil'tr dlya obnaruzheniya signala na fone shuma s neizvestnoy korrelyatsionnoy funktsiey [Optimal matched filter for detecting a signal against a background of noise with an unknown correlation function], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2015, No. 11 (172), pp. 42-55.
15. *Makarov A.M., Ermakov A.S.* Method development for solving Fredholm integral equations of the second kind based on the Mellin multiplicative convolution in the class of trigonometric-logarithmic functions, *Conference Proceedings - 2021 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves, RSEMW 2021,* 2021, pp. 71-74.
16. *Makarov A.M., Postovalov S.S.* Vvedenie v teoriyu operatorov, porozhdaemykh integral'nym preobrazovaniem Mellina [Introduction to the theory of operators generated by the Mellin integral transformation], *Komp'yuternye i informatsionnye tekhnologii v nauke, inzhenerii i upravlenii "KomTekh-2019": Sb. materialov Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Computer and information technologies in science, engineering and management "ComTech-2019": Collection of materials of the All-Russian scientific and technical conference with international participation]. Rostov-on-Don – Taganrog, 2019, pp. 34-39.
17. *De Sena A, Rocchesso D.* A fast Mellin transform with applications in DAFx. Proceedings of the 7th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx '04), October 2004, Napoli, Italy, pp. 65-69.
18. *Makarov A.M., Postovalov S.S.* Matematicheskaya model' trigonometricheski-logarifmicheskikh bazisnykh funktsiy preobrazovaniya Mellina i ikh tsifrovaya realizatsiya [Mathematical model of trigonometric-logarithmic basis functions of the Mellin transform and their digital implementation], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2018, No. 3 (197), p. 22-33.

19. *Makarov A.M., Postovalov S.S., Ermakov A.S.* Application of integral transforms in algorithms for detecting signals against a background of noise under priori uncertainty using the Mellin's transforms, *2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies, FarEastCon 2020*, 2020, pp. 927137.
20. *Postovalov S.S., Makarov A.M.* Rezul'taty issledovaniya tochnosti predstavleniya parametricheski periodicheskikh nestatsionarnykh funktsiy yadra integral'nogo preobrazovaniya Mellina [Results of a study of the accuracy of the representation of parametrically periodic non-stationary functions of the kernel of the Mellin integral transform], *Universitetskie chteniya – 2020: Mater. nauchno-metodicheskikh chteniy PGU* [University readings - 2020: Materials of scientific and methodological readings of PSU]. Pyatigorsk, 2020, pp. 22-46.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор Г.В. Куповых.

Макаров Анатолий Михайлович – Пятигорский государственный университет; e-mail: mellin_22@mail.ru; г. Пятигорск, Россия; тел.: 89283746783; кафедра информационно-коммуникационных технологий, математики и информационной безопасности; д.т.н.; профессор.

Ермаков Александр Сергеевич – e-mail: ermakov@cascad-kmv.ru; тел.: 89620206506; кафедра информационно-коммуникационных технологий, математики и информационной безопасности; старший преподаватель.

Makarov Anatoly Mikhailovich – Pyatigorsk State University; e-mail: mellin_22@mail.ru; Pyatigorsk, Russia; phone: +79283746783; the department of ICTMIS; dr. of eng. sc.; professor; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6338-9493.

Ermakov Alexander Sergeevich – e-mail: ermakov@cascad-kmv.ru; phone: +79620206506; the department of ICTMIS; senior lecturer; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7041-9961.

УДК 004.8 DOI 10.18522/2311-3103-2023-6-88-95

Е.С. Подоплелова, И.И. Князев

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА FMEA ПРИ ПОМОЩИ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Оценка рисков – важная задача в любых сферах, начиная от производства, заканчивая медициной. Риски сопровождают проект, продукт или процесс на всей жизнедеятельности, с момента планирования до его полного прекращения. На каждом из них существуют свои подходы. К ним относится FMEA (Failure Mode and Effects Analysis) - анализ видов и последствий отказов. Предлагаемая модель основана на методе FMEA, базирующемся на оценке рисков по трем критериям: тяжесть последствий при реализации угрозы и сложность идентификации отказа, вероятность возникновения. Первые два критерия основаны на экспертной оценке, полученной в соответствии с методами искусственного интеллекта. Авторами предложена модификация третьего критерия. В своей работе мы заменили экспертную оценку критерия «вероятность возникновения» моделью машинного обучения, способной спрогнозировать этот показатель на основе статистических данных. Провели первый этап исследования поставленной задачи на открытом датасете NASA о рабочих циклах двигателей до их отказа. Изначально, ставится задача прогнозирования оставшегося количества циклов до отказа, затем мы произвели переход к задаче классификации, определяя, входит ли в зону риска оборудование, в зависимости от его потенциального остатка ресурса. Наилучший результат дал метод опорных векторов (SVM), точность классификации которого 80%. Целью работы является создание модели оценки рисков на основе методики FMEA, позволяющей повысить качество оценки, сократить субъективность в принятии решений, делая прогноз на основе исторических данных, а не только субъективном опыте эксперта.

Анализ рисков; FMEA; машинное обучение; прогнозирование; система поддержки принятия решений.