Раздел II. Системы управления и моделирования

УДК 007.52:629.3.05 DOI 10.18522/2311-3103-2024-1-122-133

А.Р. Гайдук, В.Х. Пшихопов, М.Ю. Медведев, В.Г. Гисцов

НЕПРЕРЫВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕАФФИННЫМИ ОБЪЕКТАМИ [*]

Предложен метод построения непрерывного управления неаффинными по управлению объектами с дифференцируемыми нелинейностями и измеряемым вектором переменных состояния. Предложенный метод базируется на использовании квазилинейных моделей нелинейных объектов, которые создаются на основе их уравнений в форме Коши с сохранением точности описания. В работе показано, что управление по состоянию и воздействиям существует, если нелинейный объект является вполне управляемым по состоянию и удовлетворяет критерию управляемости выходом. Для определения управления необходимо по квазилинейной модели объекта найти ряд полиномов и решить полиномиальное и нелинейное алгебраическое уравнения. Метод является аналитическим и позволяет обеспечить некоторые первичные показатели качества. Область притяжения положения равновесия замкнутой системы определяется областью пространства состояний, в которой выполняется условие управляемости квазилинейной модели объекта. В зависимости от свойств нелинейностей объекта, управление определяется либо как функция переменных состояния и отклонения, либо является численным решением, получаемым итерационным методом. Искомое управление найдено в непрерывной форме, однако оно может быть легко записано в дискретном виде для реализации вычислительным устройством. В данной статье приводится обзор и краткий анализ известных результатов в области управления неаффинными объектами, формализуется решаемая задача, формулируются условия ее разрешимости, а также выводятся аналитические выражения для нахождения управляющего воздействия. Приведен численный пример с результатами синтеза и моделирования, который позволяет заключить, что приведённые соотношения приводят к нахождению непрерывного управления неаффинным объектом с дифференцируемыми нелинейностями и измеряемым вектором состояния, при котором обеспечиваются требуемые свойства замкнутой системы управления. При этом найденное управление обеспечивает равенство статической ошибки нулю и длительность переходного процесса, не превышающая заданную величину. Приведенные результаты моделирования замкнутой системы управления нелинейным неаффинным объектом третьего порядка подтверждают выполнение указанных свойств.

Неаффинный по управлению объект; дифференцируемая нелинейность; квазилинейная модель; полиномиальное уравнение; устойчивость; критерий управляемости выходом.

A.R. Gaiduk, V.Kh. Pshikhopov, M.Yu. Medvedev, V.G. Giscov

CONTINUOUS CONTROL OF NONLINEAR NON-AFFINE OBJECTS

The paper proposes a method for constructing continuous control of non-affine control objects with differentiable nonlinearities and a measurable state vector. The method is based on the use of quasilinear models of nonlinear objects, which are created on the basis of their equations in Cauchy

[*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00370 «**Разработка вероятностных методов оптимизации траекторий группы подвижных робототехнических комплексов в априори неопределенной среде**», https://rscf.ru/project/22-29-00337/ на базе АО «НКБ Робототехники и систем управления».

form while maintaining the accuracy of the description. It is shown that control by state and influences exists if the nonlinear object is completely controllable by state and satisfies the criterion of output controllability. To determine the control, it is necessary to find a number of polynomials using the object model and solve polynomial and nonlinear algebraic equations. The method is analytical and allows us to provide some primary quality indicators. The region of attraction of the equilibrium position of a closed system is determined by the region of state space in which the controllability condition of the quasi-linear model of the object is satisfied. Depending on the nonlinearity properties of the object, control is defined either as a function of state and deviation variables, or is a numerical solution obtained by an iterative method. The required control is oriented towards implementation by a computing device. The article provides the formulation of the problem, the conditions for its solvability, as well as analytical expressions for finding the control action. A numerical example is given with the results of synthesis and modeling, which allows us to conclude that the above relations lead to finding continuous control of a non-affine object with differentiable nonlinearities and a measurable state vector, which ensures the required properties of a closed-loop control system.

Non-affine control object; differentiable nonlinearity; quasi-linear model; polynomial equation; stability; output controllability criterion.

Введение. Характеристики нелинейных объектов управления отличаются большим разнообразием, что обуславливает существенно разные свойства реальных нелинейных объектов. Это приводит к большому разнообразию методов создания нелинейных систем управления нелинейными объектами. При этом рассматриваемые объекты, чаще всего, считаются непрерывными, дифференцируемыми или интервально-дифференцируемыми нелинейностями. Довольно сложным является решение этой задачи в случаях, когда нелинейные объекты являются неаффинными по управлению и(или) по возмущениям [1–5]. В уравнения таких объектов управление входит довольно сложным, нелинейным образом, что существенно осложняет его определение с применением известных методов синтеза нелинейных систем управления. В тоже время неаффинные по управлению объекты составляют довольно обширный класс нелинейных объектов; к ним относятся подводные аппараты, надводные суда, летательные аппараты, мобильные роботы и многие другие нелинейные объекты [4, 6–9].

В настоящее время для определения управления неаффинными объектами с дифференцируемыми нелинейностями, используются различные методы. Так в работах [1, 2], используется критерий гиперустойчивости В.М. Попова и условия L-диссипативности. Предложенный подход может применяться для создания нелинейных систем управления различными неаффинными динамическими объектами с запаздыванием. Однако использование критерия гиперустойчивости приводит к большим запасам по устойчивости и некоторым ограничениям на вид нелинейностей.

Весьма эффективным в ряде случаев оказывается адаптивный подход [3–5]. Это управление может дополняться робастным управлением, которое создается либо на основе метода обратного распространения ошибки, либо на основе метода обратной динамики. В работах [6, 7] адаптивное управление используется совместно с нечетким управлением. В данном подходе уравнения неопределенного неаффинного объекта преобразуются в уравнения нестационарного объекта, к которому применяется метод усреднения. При этом, адаптивное управление синтезируется с использованием аппроксимирующих свойств fuzzy-систем. Как правило, замкнутая система с fuzzy-управлением имеет ограниченную по норме ошибку. Из нечетких подходов для синтеза управления неффинными системами применяются оптимизационная концепция Такаги-Сугено или нечеткая аппроксимация с применением фильтра нижних частот Баттерворта и метода функций Ляпунова.

Дискретное управление применяется в работах [5, 11], при этом параметры регулятора с дискретной обратной связью определяется с применением функции Ляпунова. Для решения задачи синтеза управлений неаффинными объектами находят применение и нейросети [12]. Однако применение многих распространенных методов синтеза нелинейных управлений в случае неаффинных объектов оказывается достаточно сложным.

В данной работе для определения непрерывного управления неаффинным по управлению объектом с дифференцируемыми нелинейностями предварительно выполняется представление его уравнений квазилинейной моделью [5, 13]. В том случае, когда эта модель удовлетворяет естественным условиям управляемости по состоянию, то достаточно просто находится непрерывное управление неаффинным объектом, которое обеспечивает устойчивость положения равновесия в большом или в целом. Последнее определяется той областью пространства состояний объекта, в которой выполняются условия управляемости по состоянию. Квазилинейная модель нелинейного объекта позволяет также оценить и управляемость его выходной величины и, соответственно, замкнутой системы. При выполнении соответствующих условий предложенный ниже подход позволяет обеспечить требуемое быстродействие и другие показатели качества процесса управления.

I. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейный объект, описываемый системой дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\dot{w} = \xi(w,u), \quad v = \zeta(w), \tag{1}$$

где w – n-вектор-столбец переменных состояния; $\zeta(w)$ и $\xi(w,u)$ – дифференцируемые по всем аргументам нелинейные скалярная и n-вектор-функции, u – управление, v – выходная переменная объекта, причем $\xi(0,0)=0$, $\zeta(0)=0$; вектор w предполагается измеряемым.

Необходимо найти закон управления $u=u(w, g(t))$, как функцию задающего воздействия $g = g(t)$ и вектора w. При этом управлении положение равновесия замкнутой системы должно быть асимптотически устойчивым, по крайней мере в большом, статическая ошибка по задающему воздействию – равной нулю, а длительность переходного процесса при нулевых начальных условиях $w_0 = 0$ и $g(t) = g_0 1(t)$ не более заданной величины $t^*_{\text{пп}}$ *с*.

II. Решение задачи. Воспользовавшись дифференцируемостью нелинейностей системы (1) и аналитическим методом синтеза КЛМ [11, 12], запишем её квазилинейную модель, которая в данном случае имеет вид

$$\dot{w} = \Xi(w)w + h(w,u)u\,, \ v = \varsigma^T(w)w\,, \tag{2}$$

где

$$\Xi(w) = \begin{bmatrix} \chi_{11}(w) & \chi_{12}(w) & \dots & \chi_{1n}(w) \\ \chi_{21}(w) & \chi_{22}(w) & \dots & \chi_{2n}(w) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{n1}(w) & \chi_{n2}(w) & \dots & \chi_{nn}(w) \end{bmatrix}, \ h(x,u) = \begin{bmatrix} \eta_1(w,u) \\ \eta_2(w,u) \\ \vdots \\ \eta_n(w,u) \end{bmatrix},$$

$$\varsigma^T(w) = [\varsigma_1(w)\ \varsigma_2(w)\ \dots\ \varsigma_n(w)]. \tag{3}$$

Коэффициенты χ_{ij} и η_j, $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$, в выражениях (2) и (3), зависящие от вектора w и управления u, определяются по формулам, приведенным в [13].

Основным свойством КЛМ является то, что эта модель описывает нелинейные объекты с дифференцируемыми нелинейностями с той же точностью, что и заданные дифференциальные уравнения в форме Коши типа (1). Отличительной особенностью КЛМ неаффинных по управлению объектов является зависимость входного по управлению вектора $h(w,u)$ от управления u. По отношению к переменным состояния этот вектор может как зависеть от них, так и не зависеть [13–15], что не имеет значения.

Как отмечено выше, задача обеспечения устойчивости положения равновесия имеет решение, только в том случае, когда квазилинейная модель (2), (3) является управляемой по состоянию. Для оценки этого свойства КЛМ (2) сначала определяется матрица управляемости

$$U(w,u) = [h(w,u)\ \Xi(w)h(w,u)\ \dots\ \Xi^{n-1}(w)h(w,u)], \tag{4}$$

а затем проверяется критерий управляемости по состоянию:

$$\left|\det U(w,u)\right| \geq \iota_1 > 0, \quad w \in \Theta_U, \quad u \in J_U, \tag{5}$$

где $\iota_1 > 0$ – некоторое число; Θ_U и J_U – некоторая окрестность точки $w = 0$ и интервал допустимых значений управления такие, что выполняется условие (5). Если это условие не выполняется, то заданный объект (1) является неуправляемым, и задача синтеза не имеет решения.

При выполнении условия управляемости по состоянию (5) задача обеспечения устойчивости положения равновесия имеет решение, а управление, в соответствии принципом управления по состоянию и воздействиям [15], ищется в следующей форме:

$$u = u(g,w) = l_g g - l^T w = l_g g - [l_1 w_1 + l_2 w_2 + \ldots + l_n w_n], \tag{6}$$

где l_g, l_i, $i=1,2,\ldots,n$ – подлежащие определению функциональные коэффициенты, зависящие от переменных системы.

Для вывода расчетных соотношений, определяющих значения коэффициентов l_g, l_i, $i=1,2,\ldots,n$ в (6), запишем уравнение «управление-состояние» КЛМ (2). С этой целью, полагая в первом уравнении модели (2) $p = d/dt$, получим $pw = \Xi(w)w + h(w,u)u$ или

$$[pE - \Xi(w)]w = h(w,u)u. \tag{7}$$

Здесь E – единичная матрица [15]. Так как p – оператор, то матрица $[pE - \Xi(w)]$ при всех $|w| < \infty$ имеет обратную матрицу, поэтому из выражения (7) следует равенство

$$w = [pE - \Xi(w)]^{-1} h(w,u)u = \mathrm{adj}[pE - \Xi(w)]h(w,u)u / \Xi(p,w). \tag{8}$$

Подставим вектор w из (8) в (6), умножим обе части полученного выражения на $\Xi(p,w) = \det[pE - \Xi(w)]$ и перенесём слагаемые с u в левую часть. В результате будем иметь

$$\{\Xi(p,w) + l^T \mathrm{adj}[pE - \Xi(w)]h(w,u)\}u = l_g g. \tag{9}$$

Полученное выражение (9) – это операторное уравнение КЛМ замкнутой системы, записанное относительно управления u. Следовательно, полином в его левой части – это характеристический полином $\Upsilon(p,w,u)$ КЛМ замкнутой системы (1), (6) т.е.

$$\Xi(p,w) + l^T \mathrm{adj}[pE - \Xi(w)]h(w,u) = \Upsilon(p,w,u). \tag{10}$$

Применяемый здесь алгебраический полиномиально-матричный (АПМ) метод синтеза [15] предполагает замену в (9) полинома $\Upsilon(p,w,u)$ гурвицевым полиномом той же степени

$$\Upsilon^*(p) = \prod_{j=1}^{n}(p - p_j^*) = p^n + \eta_{n-1}^* p^{n-1} + \ldots + \eta_1^* p + \eta_0^*, \tag{11}$$

корни которого удовлетворяют условиям

$$p_j^* < -\iota_2 < 0; \quad \left|p_j^* - p_\kappa^*\right| > \iota_3, \quad j \neq \kappa, \quad j, \kappa = \overline{1,\ n} \quad \iota_2 > 0,\ \iota_3 > 0. \quad (12)$$

Гурвицевый полином (11) определяет требования к желаемому расположению корней характеристического уравнения замкнутой системы.

Произведение $l^T \mathrm{adj}[pE - \Xi(w)]h(w,u)$ из (9) и (10) можно представить следующим образом:

$$l^T \mathrm{adj}[pE - \Xi(w)]h(w,u) = \sum_{i=1}^{n} l_i\, \Upsilon_i(p, w, u), \quad (13)$$

где $\Upsilon_i(p, w, u) = e_i^T \mathrm{adj}[pE - \Xi(w)]h(w,u)$. Полиномы $\Xi(p, w)$ и $\Upsilon_i(p, w, u)$ определяются выражениями

$$\Xi(p, w) = \det[pE - \Xi(w)] = p^n + \eta_{n-1}(w)p^{n-1} + \ldots + \eta_1(w)p + \eta_0(w), \quad (14)$$

$$\Upsilon_i(p, w, u) = e_i^T \mathrm{adj}[pE - \Xi(w)]h(w,u) = \gamma_{i,n-1}(w,u)p^{n-1} + \ldots + \gamma_{i,1}(w,u)p + \gamma_{i,0}(w,u). \quad (15)$$

Здесь e_i – i-й столбец единичной $n \times n$-матрицы E. С учётом выражений (11), (13) – (15) из (10) получаем следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} l_i\, \Upsilon_i(p, w, u) = \phi_{n-1}(w)p^{n-1} + \ldots + \phi_1(w)p + \phi_0(w), \quad (16)$$

где $\phi_j(w) = \eta_j^* - \eta_j(w)$.

Полученное выражение (16) является полиномиальным уравнением относительно коэффициентов l_i n-вектора l из управления (6). Существование его решения гарантируется условием (5). Эти коэффициенты могут быть найдены путем приравнивания коэффициентов полинома при одинаковых степенях p в левой части (16) соответствующим коэффициентам в его правой части. Если же получаемые при этом уравнения записать в векторно-матричной форме, то получится система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решение которой даёт вектор $l = l(w,u)$, зависящий от вектора w и управления u. Конкретнее процесс решения уравнения (16) будет показан ниже на численном примере.

Уравнение КЛМ замкнутой системы, с учетом найденного вектора $l = l(w,u)$ в управлении (6), имеет следующий вид:

$$\dot{w} = \Upsilon(w,u)w + h(w,u)l_g g, \quad (17)$$

где $\Upsilon(w,u) = \Xi(w) + h(w,u)l^T(w,u)$ – $n \times n$-системная матрица КЛМ замкнутой системы (2), (6). В соответствии с выражениями (11), (14) – (16) характеристический полином $\Upsilon(p, w, u)$ этой матрицы при всех $w \in \Theta_U$ и $u \in J_U$ имеет вещественные, различные и отрицательные корни. Поэтому согласно [3] эта нелинейная система является гурвицевой, а её положение равновесия $w = 0$ – асимптотически устойчивым.

Следовательно, при $g = g_0 1(t)$ и достаточно малом g_0 в замкнутой системе (17) возникает установившийся режим, т.е. при $t \to \infty$ производная $\dot{w} = 0$. Обозначим: $\lim w(t) = \bar{w}$, $\lim v(t) = \bar{v}$, $\lim u(t) = \bar{u}$ при $t \to \infty$. При этом условии уравнение (17) принимает вид

$$0 = \Upsilon(\bar{w},\bar{u})\bar{w} + h(\bar{w},\bar{u})\bar{l}_g g_0. \quad (18)$$

Так как полином $\Upsilon(p,w,u)=\det[pE-\Upsilon(w,u)]$ (10) по определению вектора $l=l(w,u)$, равен желаемому характеристическому полиному $\Upsilon^*(p)$ (14), то $\det[-\Upsilon(w,u)]=\det[pE-\Upsilon(w,u)]_{p=0}=\eta_0^*\neq 0$, т.е. матрица $\Upsilon(w,u)$ имеет обратную при всех $w\in\Theta_U$, в том числе и при $\overline{w}$. Это позволяет найти вектор $\overline{w}$ из (18) и подставить его во второе уравнение (2), что приводит к выражениям:

$$\overline{w}=-\Upsilon^{-1}(\overline{w},\overline{u})h(\overline{w},\overline{u})\overline{l}_g g_0,\quad \overline{v}=-\varsigma^T(\overline{w})\Upsilon^{-1}(\overline{w},\overline{u})h(\overline{w},\overline{u})\overline{l}_g g_0. \qquad (19)$$

Статическая ошибка системы управления по задающему воздействию $g=g_0 1(t)$ определяется выражением $\varepsilon_{\text{ст}}=g_0-\overline{v}$. Поэтому на основе выражения (19) заключаем, что она будет равна нулю если только $1=-\varsigma^T(\overline{w})\Upsilon^{-1}(\overline{w},\overline{u})h(\overline{w},\overline{u})\overline{l}_g$. Так как установившееся значение $\overline{w}$ заранее неизвестно, то заменим его на w и, учитывая известное выражение $\Upsilon^{-1}(w)=\operatorname{adj}\Upsilon(w)/\det\Upsilon(w)$, представим выражение $1=-\varsigma^T(\overline{w})\Upsilon^{-1}(\overline{w},\overline{u})h(\overline{w},\overline{u})\overline{l}_g$ следующим образом:

$$\det\Upsilon(w,u)=-\varsigma^T(w)\operatorname{adj}\Upsilon(w,u)h(w,u)l_g. \qquad (20)$$

Так как матрица $\Upsilon(w,u)$ определяется выражением $\Upsilon(w,u)=\Xi(w)-h(w,u)l^T(w,u)$, то имеет место [19, с. 237] равенство

$$\operatorname{adj}\Upsilon(w,u)h(w,u)=\operatorname{adj}[\Xi(w)-h(w,u)l^T(w,u)]h(w,u)=\operatorname{adj}\Xi(w)h(w,u). \qquad (21)$$

Из выражений (20) – (21) следует, что нулевое значение статической ошибки неаффинной системы управления (1), (2) может быть обеспечено, если только выполняется условие

$$\gamma_{\text{наф}}(w,u)=-\varsigma^T(w)\operatorname{adj}\Xi(w)h(w,u)\neq 0,\quad w\in\Theta_U,\quad u\in J_U, \qquad (22)$$

Неравенство (22) можно рассматривать, как условие или критерий управляемости выходом неаффинного объекта (1). Действительно, если это условие не выполняется, то путем изменения задающего воздействия $g=g_0 1(t)$ нельзя придать выходной величине $v=-\varsigma(w)w$ не нулевое значение, так как согласно (19)–(21) в этом случае канал $g\to v$ имеет нулевой коэффициент передачи. Величину $\gamma_{\text{наф}}(w,u)$ можно рассматривать как признак управляемости выходом (ПУВ) неаффинных по управлению объектов.

Если по отношению к КЛМ (2) заданного неаффинного объекта (1) условие управляемости выходом выполняется, то из (20) следует выражение $l_g=l_g(w,u)=\det\Upsilon(w,u)/\gamma_{\text{наф}}(w,u)$. Это условие можно упростить, так как из приведенного выше равенства $\det[-\Upsilon(w,u)]=\eta_0^*$ и свойств определителей следует $\det\Upsilon(w,u)=(-1)^n\eta_0^*$. Итак, статическая ошибка $\varepsilon_{\text{ст}}=g_0-\overline{v}$ синтезируемой системы будет равна нулю, если выполняется условие (22), а в выражении (6)

$$l_g=l_g(w,u)=(-1)^n\eta_0^*/\gamma_{\text{наф}}(w,u). \qquad (23)$$

Подставляя полученные коэффициент (23) и вектор $l=l(w,u)$ в выражение (6), найдём, что искомое управление u определяется решением следующего нелинейного уравнения:

$$u-\frac{(-1)^n \eta_0^* g_0}{\gamma_{\text{наф}}(w,u)}+l^T(w,u)w=0,\quad w\in\Theta_U,\quad u\in J_U, \tag{24}$$

где вектор $l(w,u)$ определяется решением полиномиального уравнения (16).

Таким образом, управление неаффинным объектом с дифференцируемыми нелинейностями существует, если КЛМ этого нелинейного объекта является управляемой по состоянию, и имеет управляемый выход, т. е. выполняются условия (4) и (22) при $w\subset\Omega_U$; $u\in J_u$.

Метод решения уравнения (24) зависит от вида нелинейностей уравнения объекта (1). Это решение может быть найдено аналитически в виде нелинейной функции $u = u(g,w)$ или же итерационным методом, с применением компьютерных программ решения нелинейных уравнений. В последнем случае решение уравнения (24) будет дискретным, с некоторым достаточно малым шагом. При этом на каждом шаге необходимо выбирать начальное приближение $u_{\text{н}}$. При $t = 0$ целесообразно принимать $u_{\text{н}} = 0$, а при $t > 0$ на каждом i-м шаге в качестве $u_{\text{н},i}$ – принимать значение управления u_{i-1}, полученное на предыдущем шаге.

Покажем эффективность предложенного подхода на численном примере.

III. Пример. Синтезировать систему управления нелинейным объектом, нестационарный вариант которого рассматривался в [16]. Уравнения стационарного объекта имеют вид:

$$\dot w_1=0,2w_1+[1+\exp(-w_1)]w_2+0,3\sin w_1, \tag{25}$$

$$\dot w_2=\frac{1-\exp(w_1w_2)}{1+\exp(w_1w_2)}+(1+0,2\sin w_1)w_3, \tag{26}$$

$$\dot w_3=0,5\sin(w_1w_2w_3)+0,1\sin(0,5u)+0,42u,\quad v=w_1. \tag{27}$$

Обозначения – те же, что и выше. При этом, если $g=g_0 1(t)$ и $w_0 = 0$, то должно выполняться условие $\varepsilon=g_0-\bar v=0$, а длительность переходных процессов не должна превышать 5 *с* при $|u|\le 100$.

Решение. Данный объект является неаффинным, так как управление u входит в его уравнения нелинейным образом. Для решения задачи воспользуемся предложенным подходом. Применяя аналитический метод синтеза КЛМ [15], получим квазилинейную модель (2) объекта (25)–(27):

$$\dot w=\begin{bmatrix}0,2+0,3\varpi_1 & 1+e^{-w_1} & 0\\ 0,2\varpi_1 w_3 & \varpi_2 & 1\\ 0 & 0 & 0,5\varpi_3\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}0\\0\\b_3(u)\end{bmatrix}u,\quad v=[1\quad 0\quad 0]w. \tag{28}$$

где $b_3(u)=0,42+0,1\varpi_4(u)$,

$$\varpi_1=\begin{cases}0,\ if\ w_1=0,\ \text{otherwaise},\\ [\sin(w_1)]/w_1,\end{cases}\quad \varpi_2=\begin{cases}0,\ if\ w_2=0,\ \text{otherwaise},\\ \dfrac{1-\exp(w_1w_2)}{w_2[1+\exp(w_1w_2)]},\end{cases}.$$

$$\varpi_3=\begin{cases}0,\ if\ w_3=0,\ \text{otherwaise},\\ [\sin(w_1w_2w_3)]/w_3,\end{cases}\quad \varpi_4=\begin{cases}0,\ if\ u=0,\ \text{otherwaise},\\ [\sin(0,5u)]/u.\end{cases} \tag{29}$$

Прежде всего, проверяется управляемость КЛМ (28) по состоянию и выходом. По (4) и (5) с учетом (28) находится $\det U(w,u)=-(1+e^{-w_1})b_3^3(u)\ne 0$, а критерий управляемости выходом (22) имеет вид $\gamma_{\text{наф}} = (1+e^{-w_1})b_3(u) \neq 0$. Как видно, в данном случае задача синтеза имеет решение, поскольку оба критерия выполняются при всех допустимых значениях и вектора *w*, и управления *u*.

Переходя к её решению, находятся по (14), (15) с учетом матрицы $\Xi(w)$, вектора $h(w,u)$ из уравнений (28) и обозначений (29) полиномы:

$$\Xi(p,w) = p^3 + \eta_2(w)p^2 + \eta_1(w)p + \eta_0(w),$$

$$\Upsilon_2(p,w,u) = [p - 0{,}2 - 0{,}3\varpi_1]b_3(u),$$

$$\Upsilon_1(p,w,u) = (1+e^{-w_1})b_3(u), \tag{30}$$

$$\Upsilon_3(p,w,u) = [p^2 - (\psi_1 + \varpi_2)p + \psi_2]b_3(u), \tag{31}$$

где

$$\eta_2(w) = -0{,}5\varpi_3 - \varpi_2 - 0{,}3\varpi_1 - 0{,}2;$$

$$\eta_1(w) = (0{,}5\varpi_2 + 0{,}15\varpi_1 + 0{,}1)\varpi_3 + [0{,}3\varpi_2 - 0{,}2w_3(1+e^{-w_1})]\varpi_1 + 0{,}2\varpi_2;$$

$$\eta_0(w) = [(0{,}1w_3(1+e^{-w_1}) - 0{,}15\varpi_2)\varpi_1 - 0{,}1\varpi_2]\varpi_3; \quad \psi_1 = 0{,}2 + 0{,}3\varpi_1;$$

$$\psi_2 = -\psi_1\varpi_2 + 0{,}2\varpi_1 w_3(1+e^{-w_1}), \tag{32}$$

В данном случае порядок заданного объекта $n = 3$, поэтому по (11) формируется полином $\Upsilon^*(p) = p^3 + \eta_2^* p^2 + \eta_1^* p + \eta_0^*$, численные значения коэффициентов которого удобно выбрать в процессе моделирования. По коэффициентам полиномов $\Upsilon^*(p)$ и $\Xi(p,w)$ (30)–(32) находятся коэффициенты: $\phi_i(w) = \eta_i^* - \eta_i(w)$, $i = 0, 1, 2$. Используя коэффициенты полиномов $\Upsilon_i(p,w,u)$ (30), (31), а также коэффициенты $\phi_i(w)$, $i = 0, 1, 2$, записывается полиномиальное уравнение (16), решением которого определяются коэффициенты l_i искомого управления (6):

$$l_3 = \frac{\eta_2^* - \eta_2(w)}{b_3(u)}; \quad l_2 = \frac{\eta_1^* - \eta_1(w) + (\psi_1 + \varpi_2)[\eta_2^* - \eta_2(w)]}{b_3(u)};$$

$$l_1 = \frac{\eta_0^* - \eta_0(w) + (\psi_1 l_2 + \psi_2 l_3)b_3(u)}{(1+e^{-x_1})b_3(u)}. \tag{33}$$

По выражению (23) с учетом найденного выше признака управляемости выходом КЛМ (28) $\gamma_{\text{наф}}(w,u) = (1+e^{-w_1})b_3(u)$ получаем

$$l_g = l_g(w,u) = -\eta_0^* / (1+e^{-w_1})b_3(u). \tag{34}$$

Полученные выражения (29)–(34) позволяют по (24) записать нелинейное уравнение, решение которого определяет значение искомого управления:

$$u - \frac{(-1)^n \eta_0^* g_0}{\gamma_{\text{наф}}(w,u)} + l_1(w,u)w_1 + l_2(w,u)w_2 + l_3(w,u)w_3 = 0,$$

$$|w| \leq N < \infty; \; u \in J_u. \tag{35}$$

Так как приведённые выше выражения содержат много промежуточных функций, то уравнение (35) можно существенно упростить с тем, чтобы для его решения требовалось меньше машинного времени. В данном случае уравнение (35) приводится к виду:

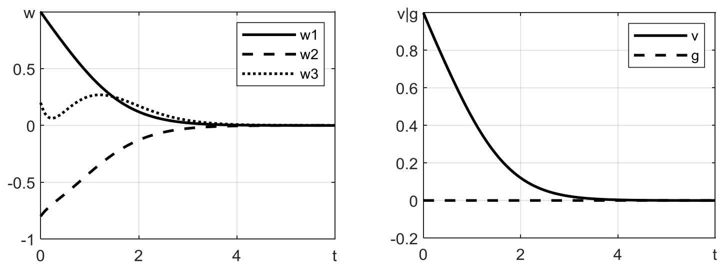
$$[0,42u+0,1\sin(0,5u)]+M(w,\varepsilon)=0\,, \tag{36}$$

где

$$M(w,\varepsilon)=-\frac{\eta_0^*\varepsilon+\{\eta_0-\psi_1[(\eta_1^*-\eta_1)+\psi_1(\eta_2^*-\eta_2)]\}w_1}{1+e^{-w_1}}+ \tag{37}$$
$$+(\eta_1^*-\eta_1)w_2+\{(\psi_1+\varpi_2)w_2+[1+0,2\sin(w_1)]w_3\}(\eta_2^*-\eta_2).$$

Моделирование. Система является нелинейной, поэтому аналитически найти корни p_j^* полинома $\Upsilon^*(p)$ невозможно. Для выбора их начальных значений при моделировании можно воспользоваться выражением $\min\left|p_j^*\right|\geq(4\div 6)/t_{\text{пп}}^*$, которое применяется в случае линейных систем. Здесь $t_{\text{пп}}^*$ желаемая длительность переходных процессов. При заданном $t_{\text{пп}}^*=5\,c$ имеем $\min\left|p_j^*\right|\geq 0,8\div 1,2$. Примем $p_1^*=-1$, $p_2^*=-2$, $p_3^*=-3$, тогда $\eta_2^*=6$, $\eta_1^*=11$, $\eta_0^*=6$.

Моделирование проводилось в Matlab при различных начальных условиях w_0 и $g(t)=g_0 1(t)$ при $g_0=0$ и $g_0=1$. Некоторые результаты моделирования представлены на рис. 1–2. При этом $w_0=[1\ -0,8\ \ 0,2]$ и $w_0=0$.



а б

Рис. 1. Переходные процессы при $w_0=[1\ -0,8\ \ 0,2]$

На рис. 1,а приведены графики изменения переменных состояния при ненулевых начальных условиях, а на рис. 1,б графики изменения выходной переменной v и воздействия $g_0=0$. Как видно, переменные состояния являются затухающими, т.е. положение равновесия синтезированной системы является асимптотически устойчивым.

На рис. 2 приведены переходные процессы той же системы, но при нулевых начальных условиях и единичном ступенчатом воздействии. На основе приведенных графиков можно заключить, что длительность переходных процессов синтезированной системы около 5 с, что соответствует условиям примера.

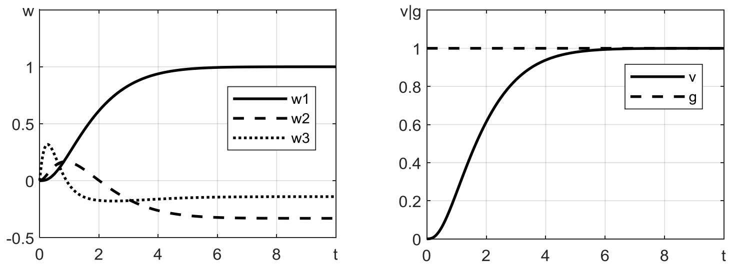


Рис. 2. Переходные процессы при ступенчатом воздействии

На основании полученных результатов моделирования можно заключить, что приведённые выше соотношения позволяют найти непрерывное управление неаффинным объектом с дифференцируемыми нелинейностями и измеряемым вектором состояния, при котором обеспечиваются требуемые свойства замкнутой системы управления.

Заключение. Предложенный в работе метод определения непрерывных управлений для неаффинных объектов является довольно простым и аналитическим. Он состоит в построении квазилинейной модели объекта, которая сохраняет все свойства неаффинного объекта. Строиться она по нелинейным уравнениям объекта в форме Коши. Задача синтеза имеет решение, если только выполняются критерий управляемости по состоянию и критерий управляемости выходом. В этом случае полученные в работе соотношения приводят к нелинейному уравнению, решение которого определяет искомое управление неаффинным объектом. Область притяжения положения равновесия замкнутой системы определяется областью пространства состояний, в которой выполняется условие управляемости квазилинейной модели объекта. В зависимости от свойств нелинейностей объекта, управление определяется либо как функция переменных состояния и отклонения, либо является численным решением, получаемым итерационным методом. Искомое управление ориентировано на реализацию вычислительным устройством.

Предложенный подход может применяться для синтеза систем управления неаффинными объектами различного назначения, включая подводные аппараты [8, 9] и воздухоплавательные комплексы [10, 20]. В дальнейшем предполагается расширить полученные результаты на случай неаффинных и по возмущениям объектов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Eremin E.L., Nikiforova L.V., Shelenok E.A.* Nonlinear control system for non-affine undefined plants with output delays // Journal of Physics Conference Series. – November 2021. – 2096 (1). – 012063.
2. *Eremin E.L, Nikiforova L.V, Shelenok E.A.* Combined system for indeterminate non-affine plant with control delay on the set of functioning states // Journal of Physics Conference Series. – May 2021. – 1864 (1). – 012032. – DOI: 10.1088/1742-6596/1864/1/012032.
3. *Lavretsky E., Hovakimyan N.* Adaptive dynamic inversion for nonaffine-in-control systems via time-scale separation: part II // Proceedings of the 2005 American Control Conference June 8-10, Portland, OR, USA. – Vol. 5. – P. 3548-3553.
4. *Longsheng C., Qi W.* Adaptive Robust Control for a Class of Uncertain MIMO Non-Affine Nonlinear Systems // IEEE/CAA Journal of Automatica SINICA. – 2016. – Vol. 3, No. 1. – P. 105-116. – DOI: 10.1109/JAS.2016.7373768.
5. *Gaiduk A., Pshikhopov V., Medvedev M., Gissov V., Kabalan A., Kosenko E.* Design of Hybrid Control System for Nonaffine Plants. In: Ronzhin, A., Sadigov, A., Meshcheryakov, R. (eds) // Interactive Collaborative Robotics. ICR 2023. Lecture Notes in Computer Science (). – Vol 14214. – Springer, Cham. – https://doi.org/10.1007/978-3-031-43111-1_19.
6. *Wen J, Jiang C.* Adaptive fuzzy controller for a class of strict-feedback nonaffine nonlinear systems // Journal of Systems Engineering and Electronics. – 2011. – Vol. 22, No. 6. – P. 967-974.
7. *Liu Y.-J., Wang W.* "Adaptive fuzzy control for a class of uncertain nonaffine nonlinear systems // Information Sciences. – September 2007. – Vol. 177, No. 18. – P. 3901-3917.
8. *Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю.* Синтез систем управления подводными аппаратами с нелинейными характеристиками исполнительных органов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 3. – С. 147-154.
9. *Пшихопов В.Х., Суконкин С.Я., Нагучев Д.Ш., Стракович В.В., Медведев М.Ю., Гуренко Б.В., Костюков В.А., Волощенко Ю.П.* Автономный подводный аппарат «Скат» для решения задач поиска и обнаружения заиленных объектов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 3 (104). – С. 153-162.
10. *Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu., Gaiduk A.R., Fedorenko R.V., Krukhmalev V.A., Gurenko B.V.* Position-Trajectory Control System for Unmanned Robotic Airship // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). – 2014. – P. 8953-8958.
11. *Lin W, Sun J.* New results and examples in semiglobal asymptotic stabilization of nonaffine systems by sampled-data output feedback // Systems & Control Letters. – 2021. – Vol. 148, Issue 11.

12. *Li Y., Zhu Q., Zhang J., Deng Z.* Adaptive fixed-time neural networks control for pure-feedback non-affine nonlinear systems with state constraints // Entropy. – 2022. – Vol. 24, Issue 5. – P. 737.
13. *Гайдук А.Р.* Численный метод синтеза квазилинейных моделей нелинейных объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2021. – Т. 22, № 6. – С. 283-290.
14. *Гайдук А.Р.* Алгебраический синтез нелинейных стабилизирующих управлений // Синтез алгоритмов сложных систем. – Таганрог: ТРТИ, 1989. – Вып. 7. – С. 15-19.
15. *Gaiduk A.R., Prokopenko N.N., Bugakova A.V., Almashaal M.J.* On the Global Stability of Nonlinear Hurwitz Control Systems // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. – 2022, December 26. – P. 1-10. – DOI: 10.1109/TASE.2022.3225763.
16. *Zhou J., Li X.* Finite-Time Mode Control Design for Unknown Nonaffine Pure-Feedback Systems // Mathematical Problems in Engineering. – 2015. – Vol. 2015. – Article ID 653739. – 9 p.
17. *Гайдук А.Р., Плаксиенко В.С., Кабалан А.Э.А.* Алгебраический полиномиально-матричный метод синтеза нелинейных астатических систем // Математические методы в технологиях и технике. – 2022. – № 1. – С. 41-45. – DOI: 10.52348/2712-8873_MMTT_2022_1_41.
18. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
19. *Гайдук А.Р.* Непрерывные и дискретные динамические системы. – М.: УМ и ИЦ «Учебная литература», 2004. – 252 с.
20. *Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю., Гайдук А.Р., Нейдорф Р.А., Беляев В.Е., Федоренко Р.В., Костюков В.А., Крухмалев В.А.* Система позиционно-траекторного управления роботизированной воздухоплавательной платформой: математическая модель // Мехатроника, автоматизация и управление. – 2013. – № 6. – С. 14-21.

REFERENCES

1. *Eremin E.L., Nikiforova L.V., Shelenok E.A.* Nonlinear control system for non-affine undefined plants with output delays, *Journal of Physics Conference Series,* November 2021, 2096 (1), pp. 12063.
2. *Eremin E.L, Nikiforova L.V, Shelenok E.A.* Combined system for indeterminate non-affine plant with control delay on the set of functioning states, *Journal of Physics Conference Series,* May 2021, 1864 (1), 012032. DOI: 10.1088/1742-6596/1864/1/012032.
3. *Lavretsky E., Hovakimyan N.* Adaptive dynamic inversion for nonaffine-in-control systems via time-scale separation: part II, Proceedings *of the 2005 American Control Conference June 8-10, Portland, OR, USA,* Vol. 5, pp. 3548-3553.
4. *Longsheng C., Qi W.* Adaptive Robust Control for a Class of Uncertain MIMO Non-Affine Nonlinear Systems, *IEEE/CAA Journal of Automatica SINICA,* 2016, Vol. 3, No. 1, pp. 105-116. – DOI: 10.1109/JAS.2016.7373768.
5. *Gaiduk A., Pshikhopov V., Medvedev M., Gissov V., Kabalan A., Kosenko E.* Design of Hybrid Control System for Nonaffine Plants. In: Ronzhin, A., Sadigov, A., Meshcheryakov, R. (eds), Interactive Collaborative Robotics. ICR 2023. Lecture Notes in Computer Science (), Vol 14214. Springer, Cham. Available at: https://doi.org/10.1007/978-3-031-43111-1_19.
6. *Wen J, Jiang C.* Adaptive fuzzy controller for a class of strict-feedback nonaffine nonlinear systems, *Journal of Systems Engineering and Electronics,* 2011, Vol. 22, No. 6, pp. 967-974.
7. *Liu Y.-J., Wang W.* Adaptive fuzzy control for a class of uncertain nonaffine nonlinear systems, *Information Sciences,* September 2007, Vol. 177, No. 18, pp. 3901-3917.
8. *Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu*. Sintez sistem upravleniya podvodnymi apparatami s nelineynymi kharakteristikami ispolnitel'nykh organov [Synthesis of control systems for underwater vehicles with nonlinear characteristics of the executive bodies], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2011, No. 3, pp. 147-154.
9. *Pshikhopov V.Kh., Sukonkin S.Ya., Naguchev D.Sh., Strakovich V.V., Medvedev M.Yu., Gurenko B.V., Kostyukov V.A., Voloshchenko Yu.P.* Avtonomnyy podvodnyy apparat «Skat» dlya resheniya zadach poiska i obnaruzheniya zailennykh ob"ektov [Autonomous underwater vehicle "Scat" for solving problems of searching and detecting silted objects], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2010, No. 3 (104), pp. 153-162.
10. *Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu., Gaiduk A.R., Fedorenko R.V., Krukhmalev V.A., Gurenko B.V.* Position-Trajectory Control System for Unmanned Robotic Airship, *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline),* 2014, pp. 8953-8958.
11. *Lin W, Sun J.* New results and examples in semiglobal asymptotic stabilization of nonaffine systems by sampled-data output feedback, *Systems & Control Letters,* 2021, Vol. 148, Issue 11.

12. *Li Y., Zhu Q., Zhang J., Deng Z.* Adaptive fixed-time neural networks control for pure-feedback non-affine nonlinear systems with state constraints, *Entropy,* 2022, Vol. 24, Issue 5, pp. 737.
13. *Gayduk A.R.* Chislennyy metod sinteza kvazilineynykh modeley nelineynykh ob"ektov [Numerical method for the synthesis of quasilinear models of nonlinear objects], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, automation, control], 2021, Vol. 22, No. 6, pp. 283-290.
14. Gayduk A.R. Algebraicheskiy sintez nelineynykh stabiliziruyushchikh upravleniy [Algebraic synthesis of nonlinear stabilizing controls], *Sintez algoritmov slozhnykh system* [Synthesis of algorithms for complex systems]. Taganrog: TRTI, 1989, Issue 7, pp. 15-19.
15. *Gaiduk A.R., Prokopenko N.N., Bugakova A.V., Almashaal M.J.* On the Global Stability of Nonlinear Hurwitz Control Systems, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering,* 2022, December 26, pp. 1-10. DOI: 10.1109/TASE.2022.3225763.
16. *Zhou J., Li X.* Finite-Time Mode Control Design for Unknown Nonaffine Pure-Feedback Systems, *Mathematical Problems in Engineering,* 2015, Vol. 2015, Article ID 653739, 9 p.
17. *Gayduk A.R., Plaksienko V.S., Kabalan A.E.A*. Algebraicheskiy polinomial'no-matrichnyy metod sinteza nelineynykh astaticheskikh sistem [Algebraic polynomial-matrix method for the synthesis of nonlinear astatic systems], *Matematicheskie metody v tekhnologiyakh i tekhnike* [Mathematical methods in technologies and engineering], 2022, No. 1, pp. 41-45. – DOI: 10.52348/2712-8873_MMTT_2022_1_41.
18. *Gantmakher F.R.* Teoriya matrits [Matrix theory]. Moscow: Nauka, 1988, 552 p.
19. *Gayduk A.R.* Nepreryvnye i diskretnye dinamicheskie sistemy [Continuous and discrete dynamic systems]. Moscow: UM i ITS «Uchebnaya literatura», 2004, 252 p.
20. *Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu., Gayduk A.R., Neydorf R.A., Belyaev V.E., Fedorenko R.V., Kostyukov V.A., Krukhmalev V.A.* Sistema pozitsionno-traektornogo upravleniya robotizirovannoy vozdukhoplavatel'noy platformoy: matematicheskaya model' [Position-trajectory control system for a robotic aeronautical platform: a mathematical model], *Mekhatronika, avtomatizatsiya i upravlenie* [Mechatronics, automation and control], 2013, No. 6, pp. 14-21.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. С.Г. Капустян.

Гайдук Анатолий Романович – НИИ робототехники и процессов управления Южного федерального университета; e-mail: gaiduk_2003@mail.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: 88634371694; д.т.н.; профессор, в.н.с.

Пшихопов Вячеслав Хасанович – e-mail: pshichop@rambler.ru; д.т.н.; профессор; директор.

Медведев Михаил Юрьевич – e-mail: medvmihal@sfedu.ru; д.т.н.; в.н.с.

Гисцов Владислав Геннадьевич – e-mail: giscov@sfedu.ru; инженер-исследователь.

Gaiduk Anatoly Romanovich – R&D Institute of Robotics and Control Systems, Southern Federal University; e-mail: gaiduk_2003@mail.ru; Taganrog, Russia; phone: +78634371694; dr. of eng. sc.; professor; leading researcher.

Pshikhopov Viacheslav Khasanovich – e-mail: pshichop@rambler.ru; dr. of eng. sc.; professor; director.

Medvedev Mikhail Yurjevich – e-mail: medvmihal@sfedu.ru; dr. of eng. sc.; leading researcher.

Giscov Vladislav Gennadjevich – e-mail: giscov@sfedu.ru; research engineer.