УДК 007:51 DOI 10.18522/2311-3103-2024-1-181-192

Ф.А. Хуссейн, В.А. Костюков, И.Д. Евдокимов

МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ МУЛЬТИ-КОММИВОЯЖЁРА В СРЕДЕ БЕЗ ПРЕПЯТСТВИЙ НА ОСНОВЕ УМЕНЬШЕНИЯ РАЗМЕРА ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ

Проводится анализ проблемы мульти коммивояжера, которая в отличие от знаменитой задачи коммивояжера, задействует несколько коммивояжёров, которые посещают заданное количество городов ровно один раз и возвращаются в исходное положение с минимальными затратами на поездку. Задача мульти коммивояжера является важной для области оптимизации маршрутов и распределения назначений между несколькими агентами. Основной целью исследования является разработка эффективного метода решения данной проблемы, который позволит сократить время выполнения задач и оптимизировать использование ресурсов. В ходе исследования был создан инновационный метод, основанный на уменьшении размерности пространства решений. Этот метод позволяет более эффективно управлять нагрузкой и ресурсами, что в свою очередь способствует минимизации общего времени выполнения задач. Особенностью метода является его универсальность и применимость в различных сценариях, включая ситуации с разным количеством задач и коммивояжеров. Такой подход обеспечивает более широкий охват и позволяет оценить применимость метода в различных контекстах, что является важным преимуществом данного исследования. Для оценки эффективности разработанного метода было проведено сравнительное исследование с использованием классического метода решения проблемы мульти коммивояжера. Оценка результатов осуществлялась на основе трех ключевых критериев: вычислительного времени получения решения задачи мульти коммивояжера, суммарной длины пройденных маршрутов коммивояжерами и максимальной длины маршрута среди них. Анализ экспериментальных данных показал, что разработанный метод значительно превосходит классический подход по всем рассматриваемым критериям в большинстве экспериментов, так как при использовании предложенного метода среднее время расчета для задачи мульти коммивояжера уменьшается на 56% по сравнению с наилучшим известным классическим результатом, при этим средняя сумма длины пройденных маршрутов коммивояжерами соответственно уменьшается на 12% и максимальная длина пути среди пройдённых агентами маршрутов (дисбаланс нагрузки) уменьшается на 8%, что подтверждает высокую эффективность предложенного метода и перспективность для практического применения в различных сферах, где требуется оптимизация маршрутов и распределения задач между несколькими исполнителями.

Задача мульти коммивояжера; распределение задач; целераспределение; мультиагентные системы; централизованное управление; групповое управление.

F.A. Houssein, V.A. Kostyukov, I. D. Evdokimov

A METHOD FOR SOLVING THE MULTI-TRAVELING SALESMAN PROBLEM IN AN ENVIRONMENT WITHOUT OBSTACLES BASED ON REDUCING THE SIZE OF THE SOLUTION SPACE

This research paper analyzes the multi traveling salesman problem, which, unlike the famous traveling salesman problem, involves several traveling salesmen who visit a given number of cities exactly once and return to their original position with minimal travel costs. The multi-traveling salesman problem is an important problem in the field of route optimization and task distribution among multiple agents. The main goal of the study is to develop an effective method for solving this problem, which will reduce task completion time and optimize the use of resources. During the study, an innovative method was created based on reducing the dimension of the solution space. This method allows you to more efficiently manage workload and resources, which in turn helps to minimize the overall execution time of tasks. A special feature of the method is its versatility and applicability in various scenarios, including situations with different numbers of tasks and traveling salespeople. This approach provides broader coverage and allows the applicability of the method to be assessed in different contexts, which is an important strength of this study. To evaluate the effectiveness of the developed method, a comparative *study was conducted using the classical method for solving the multi-traveling salesman problem. The results were evaluated based on three key criteria: the calculation time for solving the multi-traveling salesman problem, the total length of the routes traveled by the traveling salesmen, and the maximum route length among them. Analysis of experimental data showed that the developed method significantly exceeds the classical approach in all considered criteria in most experiments, since when using the proposed method, the average time for calculating a solution to the multi-traveling salesman problem is reduced by 56%, while the average sum of the lengths of routes traveled by traveling salesmen is reduced by 12%. In addition, the maximum path length among the routes traveled by agents (load imbalance) is reduced by 8%, which confirms the high efficiency of the proposed method and its promise for practical application in various fields where optimization of routes and distribution of tasks among several executors is required.*

Multi traveling salesman problem; task allocation; multi-agent systems; centralized control; group control.

Введение. Задача коммивояжера (Travelling Salesman Problem, TSP) – классическая NP-трудная задача комбинаторной оптимизации [1], определяется следующим образом. При наличии списка городов и расстояний между каждой парой городов, каков кратчайший возможный маршрут, позволяющий посетить каждый город ровно один раз и возвратиться в исходный город.

В отличие от задачи коммивояжера, которая в последние годы широко исследуется, задача мульти-коммивояжеров (Multiple Travelling Salesmen Problem, MTSP) не так привлекательна и интенсивно изучается, где задействовано несколько коммивояжёров, которые посещают заданное количество городов ровно один раз и возвращаются в исходное положение с минимальными затратами на поездку. MTSP тесно связана с другими проблемами оптимизации, такими как проблема маршрутизации транспортных средств (Vehicle Routing Problem, VRP) [2] и проблема назначения задач [3]. Действительно, MTSP представляет собой смягчение VRP, не учитывающее ни вместимость транспортного средства, ни требования клиентов. Однако MTSP можно использовать для моделирования многих реальных приложений. Например, такие проблемы, как производство/распространение газет [4, 5], планирование горячей прокатки [6, 7], планирование работы причальных кранов [8], военные поисково-спасательные операции [9] – во всех этих примерах решалась задача MTSP. MTSP является NP-полным [10], следовательно, поиск подходящих оптимальных методов и разработка эффективных алгоритмов для решения MTSP имеет большое практическое значение.

MTSP имеет несколько разных вариантов, в зависимости от характеристик депо:

♦ Одно депо или несколько депо: в стандартной версии MTSP следует учитывать только одно депо, и его положение фиксировано. Поскольку задействовано несколько коммивояжёров, наличие нескольких складов может оптимизировать стоимость туров. В таком варианте MTSP коммивояжёры могут начать свой обход с одного склада и закончить в другом складе.

♦ Фиксированное и мобильное депо: как правило, в MTSP депо является фиксированным. Однако в некоторых приложениях депо также может быть мобильным. Например, мобильное депо может представлять собой грузовик, из которого БПЛА начинают и заканчивают свои полеты.

♦ Закрытый и открытый путь: в классическом MTSP путь продавца закрыт, поскольку ему приходится начинать и заканчивать свой обход с/на одном и том же складе. Однако в некоторых приложениях продавцу не нужно возвращаться на склад, и он может оставаться в последнем посещенном городе. Более того, если рассматривается несколько складов, продавец может присоединиться к любому из существующих складов, которые могут отличаться от его первоначального склада.

В зависимости от целевой функции различают следующие разновидности MTSP:

♦ MinSum MTSP: в этом варианте MTSP целевая функция заключается в минимизации суммы затрат на поездку всех роботов. Формально вариант MinSum моделируется как:

$$\min_{Tour_i \in TOURS}\left(\sum_{i=1}^{m} C(Tour_i)\right), \quad (1)$$

$$\text{при условии}: \; Tour_i \cap Tour_j = \emptyset, \forall\, i \neq j, i \leq 1, j \leq m\,,$$

где i, j – номер коммивояжера, $Tour_i$ – путь коммивояжера i, m – количество коммивояжеров задачи, TOURS – совокупность всех возможных туров. $C(.)$ – функционал качества (длина тура).

♦ MinMax MTSP: в этом варианте целевая функция есть стоимость самого длительного тура (например, с точки зрения расстояния или времени) среди всех туров коммивояжеров. Эта случай широко используется в исследованиях, посвященных, например, сокращению времени выполнения миссии. Формально говоря, этот вариант моделируется так:

$$\min_{Tour_i \in TOURS}\left(\max_{j \in 1 \ldots m} C(Tour_j)\right), \quad (2)$$

$$\text{при условии}: \; Tour_i \cap Tour_j = \emptyset, \forall\, i \neq j, i \leq 1, j \leq m\,,$$

♦ MinSum & MinMax (многоцелевая) MTSP: в этом варианте целевая функция состоит из двух предыдущих функционалов качества.

В данной статье будет решатся MTSP с одним фиксированным депо, с закрытым путём в среде без препятствий. Функционал качества будет выбран как MinSum/MinMax. Задачи, выполняемые группой беспилотных летательных аппаратов, могут играть роль практического применения разрабатываемого нами алгоритма семейства MTSP.

Обзор публикаций. В последние годы интеллектуальные вычислительные технологии привлекают все большее внимание исследователей. Большинство этих технологий основаны на природных явлениях и пытаются использовать достоинства элементов поведения живых существ на разных иерархических уровнях их организации.

Харрат и др. [11] предложили гибридный алгоритм AC2OptGA для решения MTSP. В алгоритме использовались генетический (Genetic Algorithm, GA) и муравьиный алгоритм. Алгоритм муравьиной колонии использовался для генерации решений, а GA использовался для улучшения полученных решений. Гомес и др. [12] реализовали GA в задаче выбора маршрута транспортного средства (VRP). Цель заключалась в оптимизации ежедневных маршрутов для работников, назначенных на раздачу некоторой продукции для компании, расположенной в городе (Ковильян, Португалия). Основная цель здесь заключалась в том, чтобы минимизировать стоимость и расстояние вместо того, чтобы сбалансировать туры.

Акбай и Калайчи [13] предложили решение, основанное на алгоритме поиска переменных окрестностей, для решения задачи MTSP со сбалансированной стоимостью. Для получения результатов вычислений они использовали двадцать два набора данных, включая малые, средние и крупномасштабные экземпляры. Муньос-Эррера и Сучан [14] сосредоточили свои исследования на анализе фитнес-ландшафта (FLA) для задачи мульти-коммивояжеров и емкостного VRP (CVRP). Они предложили новую меру FLA, которая предоставила ценную информацию для характеристики структуры фитнес-ландшафта в конкретных сценариях и получила несколько взаимосвязей между структурой фитнес-ландшафта и производительностью алгоритмов. Сюй и Чжан [15] реализовали гибридный алгоритм сбалансированного MTSP, основанный на генетических алгоритмах и методе локального поиска (two-opt). Хуфи и др. [16] провели обзор существующей литературы, посвященной задачам оптимизации траектории БПЛА (беспилотных летательных аппаратов), связанным с двумя существующими общими классическими задачами: задачей коммивояжера и задачей выбора маршрута транспортного средства. Они предоставили синтетический обзор методов решения и показателей производительности и получили числовые результаты. Перейра и др. [17] реализовали гибридный алгоритм GABC-LS для решения минимального MTSP на основе генетического алгоритма, пчелиного алгоритма и двух методов локального поиска (move1-inside и two-opt).

Методика решения задач, основанная на поведении муравьев при поиске путей от гнезда к источникам пищи (оптимизация колонии муравьев – ACO), приобрела особое значение благодаря своим успешным результатам при применении к задачам оптимизации [18, 19]. Исходный ACO претерпел несколько модификаций, чтобы адаптировать его к различным реальным задачам, таким как задачи назначения, раскраска графов, планирование, проектирование схем, сети связи, биоинформатика, маршрутизация транспортных средств и т. д. С тех пор было создано несколько расширений ACO, такие, как элитарная AS [20], Ant-Q [21], Ant Colony System [22], ранговая AS [23], популяционная ACO [24], Beam-ACO [25] и т. д. Позже Алгоритм ACO был объединен с другими алгоритмами для создания гибридных методов и получения лучших результатов. Некоторые примеры гибридных методов с использованием ACO можно найти в работах [26–29].

Основы задачи мульти коммивояжёров. Одной из самых известных классических комбинаторных задач является задача коммивояжера (Travelling salesman problem) (далее TSP). Целью этой задачи является минимизация значения – обычно расстояния – при определении последовательности городов, каждый из которых посещается агентом ровно один раз, а затем агент возвращается в начальный город. Задача мульти коммивояжеров (MTSP) отличается от TSP тем, что в место одного коммивояжера их несколько, и каждый город должен посещается только один раз, только одним коммивояжером и при этом коммивояжёры должны вернутся в начальный город, откуда они начали свой тур, минимизировав сумму расстояний пройденных путей, или максимального по длине пути среди всех коммивояжёров.

Для описания задачи вводят граф $G = (V, E)$ с множеством вершин V, соединенных ребрами E, где $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$. На этом графе вершины представляют города, а ребра – дороги или возможные пути, ведущие из одного города в другой, с соответствующим значением стоимости. Самый простой способ решить TSP – попробовать все возможности, используя исчерпывающие методы, но, когда количество ребер растет, эти методы становятся слишком трудоемкими и вычислительно затратными.

Ввиду временной сложности TSP, когда количество городов становится большим, для решения задачи используются эвристические и мета-эвристические методы. Эвристика не гарантирует, что будет найдено оптимальное решение проблемы, но она может вернуть качественное решение за адекватное время для нескольких потребностей приложения. Основная цель эвристики – просто и быстро найти хорошее решение. С другой стороны, мета-эвристика – это модель, которая служит руководством для построения эвристики. Многие из этих моделей основаны на природных явлениях.

Предлагаемое решение. Сложность проблемы влияет на качество решения. Задача оптимального распределения целей может различаться по сложности в зависимости от таких факторов, как количество целей, их пространственное распределение, ограничения и количество роботов, участвующих в выполнении миссии. MTSP является NP-сложной проблемой, а это означает, что по мере увеличения количества коммивояжёров и количества городов поиск точного оптимального решения становится сложной задачей с вычислительной точки зрения.

Объем пространства решений MTSP с n задачами и m коммивояжёрами можно рассчитать с помощью числа Лаха – представляет собой коэффициент, выражающий возрастающие факториалы через падающие факториалы и наоборот. Они были обнаружены Иво Лахом в 1954 году [30]. Беззнаковые числа Лаха имеют интересное значение в комбинаторике: они подсчитывают количество способов, которыми набор элементов «*n*» может быть разделен на «*m*» непустые линейно упорядоченные подмножества. Беззнаковое число Лаха рассчитывается следующей формуле:

$$L(n,m) = \left(\frac{n!}{m!}\right)^2 * \frac{m}{n(n-m)!} \qquad (3)$$

Для решения MTSP было предложено множество различных алгоритмов, включая точные методы, такие как метод ветвей и границ, такие алгоритмы невозможно использовать для решения этой проблемы в случае, когда имеется большое количество задач и коммивояжёров из-за больших вычислительных затрат, что влияет на масштабируемость этих алгоритмов. Также используются для решения MTSP эвристические и мета-эвристические методы, такие как оптимизация муравьиной колонии, генетические алгоритмы и имитация отжига. Но они имеют две проблемы. Во-первых, использования эвристики соответствует локальной оптимизации, которая в свою очередь не проводит к глобальному оптимуму. Во-вторых, эти алгоритмы полагаются на случайные методы в поиске решений, что уменьшает вероятности нахождения оптимального решения в условиях больших количеств коммивояжёров и задач к распределению. В связи с этим, предлагается решение задачи MTSP на основе уменьшения размера пространства возможных решений.

Предложенная идея реализуется следующим образом:

Шаг 1: предполагаем, что количество агентов равно одному и решаем задачу коммивояжёра.

Шаг 2: в результате решения задачи коммивояжёра получаем оптимальную последовательность выполнения задач, которую в итоге разделяем как можно более равномерно между агентами.

Шаг 3: комбинаторно выбираем оптимальные первые и последние задачи каждого агента.

Таким образом, размер пространства возможных решений будет равен $(n\text{-}1)! + n–1$, где n – количество городов задачи MTSP.

В результате использования предложенного метода ожидается: а) существенное сокращение времени расчета задачи MTSP в связи с уменьшением размера пространства решения MTSP; б) увеличение степени оптимальности найденного решения в связи с тем, что поиск решения MTSP основан на оптимальном решении задачи TSP.

Эта методология в основном включает в себе 2 алгоритма: алгоритм решения задачи TSP и алгоритм разделения решения задачи TSP на несколько агентов.

Алгоритм решения задачи TSP (муравьиный алгоритм). В литературе существует очень много алгоритмов решения задачи TSP, например, генетические алгоритмы, биоинспирированные алгоритмы и другие. В качестве алгоритма решения задачи TSP будет использован муравьиный алгоритм.

Муравьиный алгоритм основан на том, что при поиске пищи муравьи демонстрируют сложное совместное поведение, определенное выделяемыми ими феромонами. Феромоны привлекают других муравьев и указывают путь к источнику пищи. В результате, чем больше муравьев идет по выбранном пути, тем больше этот путь будет насыщен феромоном, следовательно, вероятность того, что большее число муравьёв пойдет по нёму, растет. Кратчайший путь к цели (пище муравьев) определен большим количеством феромонов, т.к. большое количество муравьев будут двигаться по этом пути. Для устранения неоптимального пути (локальный минимум), алгоритм предусматривает испарение феромона с течением времени. Уровни феромона на самом коротком пути остаются высокими, т.к. е скорость осаждения феромона будет больше, чем его скорость испарения.

Алгоритм реализуется следующим образом. На рис. 1 изображена примерная среда передвижения, каждая точка это узел. От заданного узла i муравей имеет возможность перехода в другой узел j, если есть путь к нему, т.е. если i и j соединены прямой пунктирной линией (с исключением узла, в котором муравей был один шаг назад). В муравьином алгоритме действует вероятностно-пропорциональное правило, определяющее вероятность перехода k-го муравья из узла i к узлу j:

$$P_{ij,k} = \frac{[\tau_{ij}]^{\alpha} \cdot [\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{j \in J_{i,k}} [\tau_{ij}]^{\alpha} \cdot [\eta_{ij}]^{\beta}}, \tag{4}$$

где τ_{ij} - уровень феромона между узлами i и j; η_{ij} – эвристика на движение между узлами i и j; α, β – два регулируемых параметра, задающие веса следа феромона и эвристики при выборе маршрута; $J_{i,k}$ - список еще не посещенных узлов муравьем k.

При α=0 эффект феромона будет проигнорирован в расчёте вероятностей следующего шага, на вероятности выбора какого-либо узла будет влиять только эвристика, т.е. если эвристика есть расстояние между узлами, то выбор ближайшего узла будет самым вероятным, что соответствует жадному алгоритму в классической теории оптимизации. Если β=0, то работает лишь феромонное усиление, что влечет за собой быстрое вырождение маршрутов к одному субоптимальному решению.

Уравнение (4) определяет вероятности выбора конкретного узла. Сам выбор сделан по принципу колеса рулетки: в каждом узле есть свой сектор, площадь которого пропорциональна с вероятностью $P_{ij,\,k.}$ Узел выбран на основе равновероятного распределения. Когда муравей k достигает цели, то он оставляет феромон, значение которого рассчитывается по следующему уравнению:

$$\Delta\tau_{ij,k} = \begin{cases} Q/L_k & if\ \ (i,j) \in T_k; \\ 0 & if\ \ (i,j) \notin T_k; \end{cases} \tag{5}$$

где T_k - маршрут муравья k; L_k - длина маршрута; Q - константа.

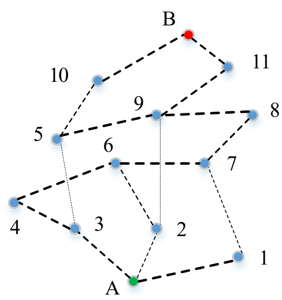

Рис. 1. Пример среды работы муравьиного алгоритма, узлы и пути межу ними

Чтобы изучить все пространство решений и избежать попадания в локальный минимум, феромон должен испариться, правило обновления феромонов принимает форму:

$$\tau_{ij}(t+1)=(1-\rho)(t)+\sum_{k=1}^{m}\Delta\tau_{ij,k}\ , \tag{6}$$

где t - номер цикла; ρ - коэффициент испарения; m - количество муравьев.

Алгоритм берёт на вход список координат местоположения городов (C) (задач) и координат города-депо ($c_{start} \in C$) (города, из которого коммивояжёр начинает свой маршрут), если не указывать координаты города-депо, то программа выберет блажащий к центру карты город в качестве города-депо. Далее город-депо исключается из списка городов чтобы его не ограничивать к двумя городами. Таким образом образуется список городов без города-депо ($C^{\cdot}$). После этого рассчитывается матрица расстояний каждого города до остальных городов (D), следовательно, рассчитывается параметр эвристики муравьиного алгоритма следующим образом:

$$\eta = 1/D. \tag{7}$$

В качестве функционала качества выбрано евклидово расстояние:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \tag{8}$$

где d – евклидовое расстояние, x_1, y_1 – координаты первого города, x_2, y_2 – координаты второго города.

Далее запускается муравьиный алгоритм и рассчитывается оптимальное решение задачи TSP как показано ниже.

Алгоритм 1 Муравьиный Алгоритм.

```
Инициализировать параметры
Расположите муравьев в начальном узле
while условие остановки не выполнено do
    Муравьи строят пути
    Обновление феромона
    Обновить лучшее решение
end while
Сохранить лучшее решение.
```

Алгоритм разделения решения задачи TSP на несколько агентов. После расчёта оптимального пути задачи TSP нужно его разделить между агентами, чтобы получить решение задачи MTSP. Для этого формируем матрицу расстояния каждого города до других городов η^*, включая промежуточных города по пути, если они есть.

Далее рассчитывается примерная длина маршрута d^*, который должен быть пройден каждым из агентов путем разделения длины маршрута задачи TSP на количество агентов. Путем последовательного перебора городов первого агента, начиная с первого города, находится такой город, что расстояние до него по полученной кусочно-ломаной траектории максимально близко к числу d^*. Узлы этой траектории и есть центры городов. Для нахождения такого города необходимо пользоваться ранее полученной матрицей расстояний между каждой парой городов.

Первый город следующего агента выбирается в качестве города, следующего за последним городом предыдущего агента, и этот процесс повторяется до тех пор, пока не будут набраны все агенты. Далее рассчитывается и сохраняется сумма длин маршрутов всех клиентов.

Начальный город первого агента изменяется с помощью цикла до тех пор, пока не будут рассмотрены все решения, затем сохраняется решение, обеспечивающее наименьшую сумму пройденных расстояний.

Таким образом мы достигаем минимизации суммы длин пройденных маршрутов за счет оптимизации решения задачи TSP (на первом шаге) и обеспечиваем наилучшее разделение маршрута TSP на пути отдельных коммивояжеров за счет равномерного разбиения этого маршрута на одинаковые по длине сегменты (на втором шаге).

Моделирование. В качестве алгоритма для сравнения используется алгоритм ACO-BMTSP [31], который, как и предложенный метод, основан на муравьином алгоритме. Оба алгоритма были запрограммированы на языке Python.

Для исследования указанных алгоритмов были приготовлены 3 эталонных задачи:

- eil51: эталонная задача с 51 городом.
- kroA100: эталонная задача с 100 городами.
- kroA150: эталонная задача с 150 городами.

Для каждой из этих задач были поставлены 3 сценария:

- с 3 агентами.

- с 5 агентами.
- с 10 агентами.

Каждый сценарии был запущен с 40, 320 муравьями по 100 раз чтобы посчитать статистику.

Критерии оценки:

- время расчета решения задачи MTSP.
- сумма длин пройденных агентами путей.
- максимальная длина пути среде пройдённых агентами маршрутов.

Результаты. Результаты, полученные после моделирования, представлены в табл. 1-3. содержат сравнения результатов предложенного алгоритма и алгоритма ACO-BMTSP в экземплярах Eil51, KroA100, KroA150 последовательно, с точки зрения среднего времени расчета «average time» (в секундах), средней суммы длин маршрутов «average sum» (в метрах), средней максимальной длины маршрутов «average max» (в метрах). Усреднение проводилось на множестве всех численных экспериментов для каждого типа задачи.

Таблица 1

Результаты исследования сценария eil51

Алгоритм	ACO-BMTSP			Предложены		
Кол. муравьев	40					
Кол. агентов	3	5	10	3	5	10
average time	20.736	21.387	22.226	11.138	11.365	11.280
average sum	574.453	652.233	869.084	560.458	639.968	825.55
average max	201.378	146.134	105.455	193.585	141.616	101.2
Кол. муравьев	320					
average time	175.244	179.321	173.894	91.235	84.765	85.439
average sum	551.047	628.635	846.799	516.529	614.415	837.305
average max	193.042	139.77	103.738	178.685	134.889	100.757

Таблица 2

Результаты исследования сценария KroA100

Алгоритм	ACO-BMTSP			Предложены		
Кол. муравьев	40					
Кол. агентов	3	5	10	3	5	10
average time	58.241	59.188	61.851	29.924	29.691	29.798
average sum	34498.26	42908.17	65523.66	33485.07	41400.2	59090.6
average max	12188.25	9631.54	8154.340	11717.517	9456.03	8277.39
Кол. муравьев	320					
average time	469.95	482.28	498.25	234.46	236.22	233.14
average sum	32985.43	41521.02	63963.67	30547.18	38918.78	56477.77
average max	11651.21	9488.57	8025.11	10820.9	9009.73	8076.90

Таблица 3

Результаты исследования сценария KroA150

Алгоритм	ACO-BMTSP			Предложены		
Кол. муравьев	40					
Кол. агентов	3	5	10	3	5	10
average time	107.88	108.94	114.1	52	51.33	51.27
average sum	43049.57	50974.79	72337.29	41854.93	49117.82	66728.86
average max	14987.11	11190.31	8700.76	14401.55	10846.61	8758.39
Кол. муравьев	320					
average time	851.4	871.53	911.61	401.4	401.99	401.08
average sum	41123.39	48892.26	70298.32	38103.16	45767.76	63477.08
average max	14290.97	10777.28	8552.64	13193.32	10271.08	8471.84

Сравнительный анализ показал, что при использовании предложенного метода достигаются следующие сравнительные преимущества: а) время расчета решения задачи MTSP уменьшается на 56%; б) суммарная длина пути уменьшается на 12%; в) максимальная длина пути среди пройдённых агентами маршрутов (дисбаланс нагрузки) уменьшается на 8%.

Заключение. В данной статье предлагается новая методика решения задачи мульти коммивояжеров на основе уменьшения пространства состояний. Проведено исследование предложенной методики на 3 эталонных задачах коммивояжера с участим 3, 5, 10 агентов. Качество решения измерялось по 3 критериям: времени расчета решения, суммы расстояний маршрутов всех коммивояжеров, максимальной длины пути среди пройдённых всеми агентами маршрутов. Результаты были сравнены с традиционным алгоритмом на основе муравьиного алгоритма. Статистический анализ результатов показал, что в средним, предложенный метод превосходит классический.

В последующих публикациях мы намерены показать, каким образом рассмотренный в настоящей статье алгоритм решения задачи мульти коммивояжеров позволяет получить соответствующий оптимальный алгоритм по критерию минимума на множестве всех расстояний, проходимых коммивояжерами.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00492 «**Разработка методов оптимального целераспределения в группе подвижных робототехнических комплексов**», https://rscf.ru/project/24-29-00492/ на базе АО «НКБ Робототехники и систем управления».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Gutin G., Punnen A.P.* The Traveling Salesman Problem and its Variations. – Springer, Boston, 2007.
2. *Braekers K., Ramaekers K. Nieuwenhuyse I.* The vehicle routing problem: State of the art classification and review, Comput. Ind. Eng., 99.
3. *Oncan T.* A survey of the generalized assignment problem and its applications // INFOR: Information Systems and Operational Research. – 2007. – Vol. 45. – P. 123-141.
4. *Van Buer M.G., Woodru D.L., Olson R.T.* Solving the medium newspaper production/distribution problem // European Journal of Operational Research. – 1999. – 115. – P. 237-253.
5. *Carter A.E., Ragsdale C.T.* Scheduling pre-printed newspaper advertising inserts using genetic algorithms // Omega. – 2002. – P. 415-421.
6. *Kewei Huang, Dingwei Wang.* Multiple traveling salesman problem and its application to hot rolling planning // Application Research of Computers. – July 2007. – 24 (7). – P. 43-46.
7. *Tang L., Liu J., Ronga A., Yang Z.* A multiple traveling salesman problem model for hot rolling schedule in Shanghai Baoshan Iron and Steel Complex // European Journal of Operational Research. – 2000. – 124 (2). – P. 267-282.
8. *Kim K.H., Park Y.M.* A crane scheduling method for port container terminals // European Journal of Operational Research. – 2004. – 156. – P. 752-768.
9. *Sheldon H. Jacobson, Laura A. McLay, Shane N. Hall, Darrall Henderson, Diane E. Vaughan.* Optimal search strategies using simultaneous generalized hill climbing algorithms // Mathematical and Computer Modelling. – 2006. – 43. – P. 1061-1073.
10. *Evelyn C. Brown, Cliff T. Ragsdale, Arthur E. Carter.* A grouping genetic algorithm for the multiple traveling salesperson problem // International Journal of Information Technology & Decision Making. – 2007. – Vol. 6, No. 2. – P. 333-347.
11. *Harrath Y., Salman A.F., Alqaddoumi A., Hasan H., Radhi A.* A novel hybrid approach for solving the multiple traveling salesmen problem // Arab. J. Basic Appl. Sci. – 2019. – P. 103-112.
12. *Gomes D.E., Iglésias M.I.D., Proença A.P., Lima T.M., Gaspar P.D.* Applying a Genetic Algorithm to a m-TSP: Case Study of a Decision Support System for Optimizing a Beverage Logistics Vehicles Routing Problem // Electronics. – 2021.

13. *Akbay M.A., Kalayci C.B.* A Variable Neighborhood Search Algorithm for Cost-Balanced Travelling Salesman Problem // In Proceedings of the Metaheuristics Summer School, Taormina, Italy, 2018.
14. *Muñoz-Herrera S., Suchan K.* Constrained Fitness Landscape Analysis of Capacitated Vehicle Routing Problems // Entropy. – 2022. – Vol. – P. 53.
15. *Xu H.L., Zhang C.M.* The research about balanced route MTSP based on hybrid algorithm // In Proceedings of the 2009 International Conference on Communication Software and Networks, Chengdu, China, 2009. – P. 533-536.
16. *Khoufi I., Laouiti A., Adjih C.* A Survey of Recent Extended Variants of the Traveling Salesman and Vehicle Routing Problems for Unmanned Aerial Vehicles // Drones. – 2019. – Vol. 3. – P. 66.
17. *de Castro Pereira S., Solteiro Pires E.J., de Moura Oliveira P.B.* A Hybrid Approach GABC–LS to Solve MTSP // In Proceedings of the Optimization, Learning Algorithms and Applications. – Springer International Publishing: Cham, Switzerland, 2022. – P. 520-532.
18. *Dorigo M., Birattari M., Stutzle T.* Ant colony optimization // IEEE Comput. Intell. Mag. – 2006. – P .28-39.
19. *Zhan S.C., Xu J., Wu J.* The optimal selection on the parameters of the ant colony algorithm // Bull. Sci. Technol. – 2003. – P. 381-386.
20. *Dorigo M.* Optimization, Learning and Natural Algorithms. Ph.D. Thesis, Politecnico di Milano, Milano, Italy, 1992.
21. *Gambardella L.M., Dorigo M.* Ant-Q: A reinforcement learning approach to the traveling salesman problem // In Machine Learning Proceedings. – Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 1995. – P. 252-260.
22. *Dorigo M., Gambardella L.M.* Ant colonies for the travelling salesman problem // Biosystems. – 1997. – P. 73-81.
23. *Bullnheimer B., Hartl R., Strauss C.* A New Rank Based Version of the Ant System—A Computational Study // Cent. Eur. J. Oper. Res. – 1999. – P. 25-38.
24. *Guntsch M., Middendorf M.* A population based approach for ACO // In Proceedings of the Workshops on Applications of Evolutionary Computation, Kinsale, Ireland, 3–4 April 2002. – Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2002. – P. 72-81.
25. *Blum C.* Theoretical and Practical Aspects of Ant Colony Optimization. – IOS Press: Amsterdam, The Netherlands, 2004. – Vol. 282.
26. *Хуссейн Ф.А., Финаев В.И.* Исследование эффективности алгоритма искусственных потенциалов, муравьиного алгоритма и их комбинации при планировании траектории движения мобильного робота // Компьютерные и информационные технологии в науке, инженерии и управлении (КомТех-2020). – 2020. – С. 39-48.
27. *Huang K.L., Liao C.J.* Ant colony optimization combined with taboo search for the job shop scheduling problem // Comput. Oper. Res. – 2008. – P. 1030-1046.
28. *Xiao J., Li L.* A hybrid ant colony optimization for continuous domains // Expert Syst. Appl. – 2011. – P. 11072-11077.
29. *Rahmani R., Yusof R., Seyedmahmoudian M., Mekhilef S.* Hybrid technique of ant colony and particle swarm optimization for short term wind energy forecasting // J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn. – 2013. – P. 163-170.
30. *Lah Ivo.* A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics // Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses. – 1954. – P. 7-15.
31. *de Castro Pereira S., Solteiro Pires E.J., de Moura Oliveira P.B.* Ant-Balanced Multiple Traveling Salesmen: ACO-BMTSP // Algorithms. – 2023. – P. 37.

REFERENCES

1. *Gutin G., Punnen A.P.* The Traveling Salesman Problem and its Variations. Springer, Boston, 2007.
2. *Braekers K., Ramaekers K. Nieuwenhuyse I.* The vehicle routing problem: State of the art classification and review, Comput. Ind. Eng., 99.
3. *Oncan T.* A survey of the generalized assignment problem and its applications, *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 2007, Vol. 45, pp. 123-141.
4. *Van Buer M.G., Woodru D.L., Olson R.T.* Solving the medium newspaper production/distribution problem, *European Journal of Operational Research*, 1999, 115, pp. 237-253.

5. *Carter A.E., Ragsdale C.T.* Scheduling pre-printed newspaper advertising inserts using genetic algorithms, *Omega,* 2002, pp. 415-421.
6. *Kewei Huang, Dingwei Wang.* Multiple traveling salesman problem and its application to hot rolling planning, *Application Research of Computers,* July 2007, 24 (7), pp. 43-46.
7. *Tang L., Liu J., Ronga A., Yang Z.* A multiple traveling salesman problem model for hot rolling schedule in Shanghai Baoshan Iron and Steel Complex, *European Journal of Operational Research,* 2000, 124 (2), pp. 267-282.
8. *Kim K.H., Park Y.M.* A crane scheduling method for port container terminals, *European Journal of Operational Research,* 2004, 156, pp. 752-768.
9. *Sheldon H. Jacobson, Laura A. McLay, Shane N. Hall, Darrall Henderson, Diane E. Vaughan.* Optimal search strategies using simultaneous generalized hill climbing algorithms, *Mathematical and Computer Modelling,* 2006, 43, pp. 1061-1073.
10. *Evelyn C. Brown, Cliff T. Ragsdale, Arthur E. Carter.* A grouping genetic algorithm for the multiple traveling salesperson problem, *International Journal of Information Technology & Decision Making,* 2007, Vol. 6, No. 2, pp. 333-347.
11. *Harrath Y., Salman A.F., Alqaddoumi A., Hasan H., Radhi A.* A novel hybrid approach for solving the multiple traveling salesmen problem, *Arab. J. Basic Appl. Sci*., 2019, pp. 103-112.
12. *Gomes D.E., Iglésias M.I.D., Proença A.P., Lima T.M., Gaspar P.D.* Applying a Genetic Algorithm to a m-TSP: Case Study of a Decision Support System for Optimizing a Beverage Logistics Vehicles Routing Problem, *Electronics*, 2021.
13. *Akbay M.A., Kalayci C.B.* A Variable Neighborhood Search Algorithm for Cost-Balanced Travelling Salesman Problem, *In Proceedings of the Metaheuristics Summer School, Taormina, Italy, 2018.*
14. *Muñoz-Herrera S., Suchan K.* Constrained Fitness Landscape Analysis of Capacitated Vehicle Routing Problems, *Entropy,* 2022, pp. 53.
15. *Xu H.L., Zhang C.M.* The research about balanced route MTSP based on hybrid algorithm, *In Proceedings of the 2009 International Conference on Communication Software and Networks, Chengdu, China, 2009,* pp. 533-536.
16. *Khoufi I., Laouiti A., Adjih C.* A Survey of Recent Extended Variants of the Traveling Salesman and Vehicle Routing Problems for Unmanned Aerial Vehicles, *Drones,* 2019, Vol. 3, pp. 66.
17. *de Castro Pereira S., Solteiro Pires E.J., de Moura Oliveira P.B.* A Hybrid Approach GABC–LS to Solve MTSP, *In Proceedings of the Optimization, Learning Algorithms and Applications. – Springer International Publishing: Cham, Switzerland, 2022,* pp. 520-532.
18. *Dorigo M., Birattari M., Stutzle T.* Ant colony optimization, *IEEE Comput. Intell. Mag*., 2006, pp .28-39.
19. *Zhan S.C., Xu J., Wu J.* The optimal selection on the parameters of the ant colony algorithm, *Bull. Sci. Technol*., 2003, pp. 381-386.
20. *Dorigo M.* Optimization, Learning and Natural Algorithms. Ph.D. Thesis, Politecnico di Milano, Milano, Italy, 1992.
21. *Gambardella L.M., Dorigo M.* Ant-Q: A reinforcement learning approach to the traveling salesman problem, *In Machine Learning Proceedings*. Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 1995, pp. 252-260.
22. *Dorigo M., Gambardella L.M.* Ant colonies for the travelling salesman problem, *Biosystems,* 1997, pp. 73-81.
23. *Bullnheimer B., Hartl R., Strauss C.* A New Rank Based Version of the Ant System—A Computational Study, *Cent. Eur. J. Oper. Res*., 1999, pp. 25-38.
24. *Guntsch M., Middendorf M.* A population based approach for ACO, *In Proceedings of the Workshops on Applications of Evolutionary Computation, Kinsale, Ireland, 3–4 April 2002*. Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2002, pp. 72-81.
25. *Blum C.* Theoretical and Practical Aspects of Ant Colony Optimization. IOS Press: Amsterdam, The Netherlands, 2004, Vol. 282.
26. *Khusseyn F.A., Finaev V.I.* Issledovanie effektivnosti algoritma iskusstvennykh potentsialov, murav'inogo algoritma i ikh kombinatsii pri planirovanii traektorii dvizheniya mobil'nogo robota [Study of the effectiveness of the algorithm of artificial potentials, the ant algorithm and their combination when planning the trajectory of a mobile robot], *Komp'yuternye i informatsionnye tekhnologii v nauke, inzhenerii i upravlenii (KomTekh-2020)* [Computer and information technologies in science, engineering and management (ComTech-2020)], 2020, pp. 39-48.
27. *Huang K.L., Liao C.J.* Ant colony optimization combined with taboo search for the job shop scheduling problem, *Comput. Oper. Res*., 2008, pp. 1030-1046.

28. *Xiao J., Li L.* A hybrid ant colony optimization for continuous domains, *Expert Syst. Appl*., 2011, pp. 11072-11077.
29. *Rahmani R., Yusof R., Seyedmahmoudian M., Mekhilef S.* Hybrid technique of ant colony and particle swarm optimization for short term wind energy forecasting, *J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn*, 2013, pp. 163-170.
30. *Lah Ivo.* A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics, *Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses*, 1954, pp. 7-15.
31. *de Castro Pereira S., Solteiro Pires E.J., de Moura Oliveira P.B.* Ant-Balanced Multiple Traveling Salesmen: ACO-BMTSP, *Algorithms*, 2023, pp. 37.

Статью рекомендовал к опубликованию к.т.н. В.В. Пивнев.

Костюков Владимир Александрович – АО «НКБ Робототехники и систем управления»; e-mail: wkost-einheit@yandex.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: 88634371694; к.т.н.; научный руководитель.

Хуссейн Фирас Айманович – e-mail: firas94mecha@gmail.com; тел.: 89996379357; м.н.с.

Евдокимов Игорь Дмитриевич – e-mail: igor.ezio2000@yandex.ru; тел. 89182235832; м.н.с.

Kostyukov Vladimir Aleksandrovich – Joint-Stock Company “Robotics and Control Systems”; e-mail: wkost-einheit@yandex.ru; Taganrog, Russia; phone: +78634371694; can. of eng. sc.; senior researcher.

Houssein Fieas Aimanovich – e-mail: firas94mecha@gmail.com; phone: +79996379357; junior researcher.

Evdokimov Igor Dmitrivich – e-mail: igor.ezio2000@yandex.ru; phone: +79182235832; junior researcher.